Der Einfluß ungleicher Erwärmung der Hauptträger auf die Windverbände vollwandiger, stählerner Brücken

---

Von der
Technischen Hochschule zu Breslau
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

Dissertation

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Ullrich Thran
aus Königsberg i. Pr.

Berichterstatter:
Professor Wilhelm Rein

Mitberichterstatter:
Professor Ulrich Fischer

Tag der mündlichen Prüfung: 22. März 1939

Spezialbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig
1939

*46879

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

Seite

Benutztes Schrifttum V

A. Einleitung 1

1. Zweck der Arbeit 1
2. Voraussetzungen und Annahmen 3
3. Bezeichnungen 4

B. Statischer Teil 5

1. Behandelte Systeme 5
2. Formelentwicklungen 5
3. System 1, Gruppe A 8
4. System 2, Gruppe B 12
5. System 3, Gruppe B 16
6. System 4, Gruppe B 18
7. System 5, Gruppe B 24
8. System 6, Gruppe B 28
9. System 7 35
10. Zusammenfassung der Ergebnisse 37
11. Näherungsverfahren für Balken auf mehreren Stützen 42
12. Vergleich der Systeme 44

C. Beispiele 57

D. Folgerungen 71

E. Schluß 80

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545813_0032

Literatur.

Engesser: „Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken.“ Julius Springer, Berlin 1892.

Engesser: „Über die Angriffe eiserner Balkenbrücken auf die Pfeiler und Widerlager.“ Zentralblatt der Bauverwaltung 1897, Seite 341, Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin.

Mlosch: „Die Wahl der Füllungssysteme von Wind- und Schlingerverbänden bei einfachen Balkenbrücken.“ Dissertation, Geschw. Erbe. Breslau 1929.

Bergfelder: „Über den Einfluß der senkrecht wirkenden Verkehrsbelastung auf die waagerechten Verbände eiserner Brücken.“ Dissertation Albert Antoni, Berlin 1929.

Müllenhoff: „Versuche über den Einfluß der Sonnenbestrahlung auf die Temperatur von Eisenteilen.“ Der Eisenbau 1921, Seite 43. Wilhelm Engelmann, Leipzig.

Schaper: „Grundlagen des Stahlbaues.“ VI. Auflage. Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1933.

A. Einleitung.

1. Zweck der Arbeit.

Durch den Bau der Deutschen Reichsautobahnen ist ein Brückensystem in den Vordergrund getreten, das in seiner straffen Linienführung und bewußten Zweckmäßigkeit alle anderen übertrifft: Der vollwandige Balken auf zwei oder mehreren Stützen.

Die ständig wachsenden Stützweiten und Gesamtlängen der Blechträger verlangen eine genaue Prüfung, ob die üblichen Annahmen bei der Berechnung derartiger Tragwerke noch zutreffend sind. Es erscheint notwendig, daß derartige Fragen, die zum größten Teil schon seit langem theoretisch gelöst sind, der Praxis durch hinreichende Näherungslösungen verwendungsfähig gemacht werden, wie es z. B. mit den kritischen Beulspannungen rechteckiger Bleche geschah.

So treten häufig Fälle auf, bei denen die Zusatzkräfte, vornehmlich der Winddruck, bei der Bemessung der Hauptträger zu berücksichtigen sind, wobei nur an das System des durchlaufenden Balkens auf Pendelstützen mit Kugelkopf erinnert werden soll. Während hierbei die senkrechten Kräfte von einem Balken auf mehreren Stützen aufgenommen werden, wirken die Windkräfte auf einen Balken auf zwei Stützen. Die Spannungen in den Hauptträgern aus Winddruck können hierbei 30 % der gesamten Spannungen erreichen. Es ist selbstverständlich, daß bei einem derartigen System die statisch unbestimmte Lagerung des Windverbandes nicht unberücksichtigt bleiben darf.

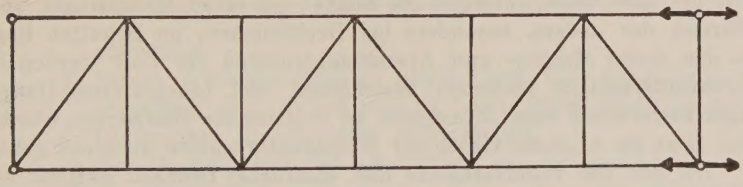


Abb. 1.

Die Lagerung der Brücken für waagerechte Kräfte besteht meist in zwei festen und zwei längsbeweglichen Lagern. Sie ist also dreifach statisch unbestimmt (Abb. 1). Bei sehr breiten Brücken werden die Lager der einen Brückenseite noch querbeweglich angeordnet.

Jedoch auch dann ist die Brücke für waagerechte Kräfte noch einfach statisch unbestimmt gelagert (Abb. 2.).

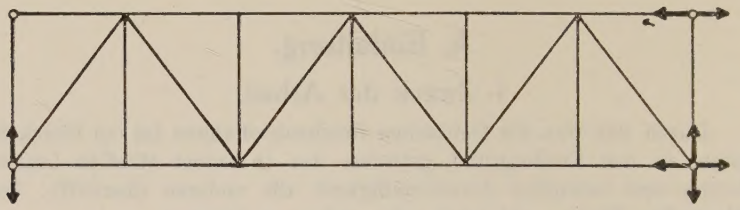


Abb. 2.

Für den Windverband sind nach den deutschen Vorschriften Winddruck, Seitenstoß und Fliehkräfte als Belastungen anzunehmen. Für Windverbände in der Nähe der Gurtungen der Hauptträger treten dazu noch die Zusatzspannungen durch die Dehnungen der Hauptträger. Bei den — hier nicht betrachteten — Fachwerkbrücken mit oberem und unterem Windverband kommen auch die räumlichen Zusatzkräfte hinzu, die bei unsymmetrischer Belastung der Brücke in Richtung der Längsachse entstehen.

Eine Kraftwirkung, die bei den Hauptträgern nötigenfalls stets untersucht wird, ist jedoch bei den Windverbänden bisher wohl noch nie eingehend verfolgt: Die ungleiche Erwärmung der einzelnen Hauptträger als Gurtungen des Windverbandes.

Bei der verhältnismäßig hohen geographischen Breite Deutschlands treffen die Sonnenstrahlen nie senkrecht den Erdboden. Sämtliche Bauwerke werden den größten Teil des Tages von der Seite beschienen. Bei Bauwerken, die nun etwa in Nord-Süd-Richtung liegen, trifft die auf- bezw. untergehende Sonne den einen Hauptträger voll, während der andere, besonders bei Deckbrücken, im Schatten liegt. Bei den tiefen Morgen- und Abendtemperaturen der Luft werden die Wärmeunterschiede zwischen bestrahltem und beschattetem Hauptträger beträchtlich sein. Messungen an bestehenden Bauwerken würden auch über die mögliche Größe der Wärmeunterschiede Auskunft geben.

Da nun die Windverbände fast sämtlicher Brücken statisch unbestimmt gelagert sind, verursacht diese ungleiche Erwärmung Kräfte. Während diese in den Hauptträgern und den meistens als Pfosten dienenden Querträgern fast immer zu vernachlässigen sind, können sie in den Streben die Größe der Kräfte aus Winddruck erreichen. Dadurch, daß die Hauptträger für senkrechte Belastung bemessen werden, ist der Windverband ein äußerst steifer Träger, bei dem die Wärmeeinflüsse groß sind. Die Streben erhalten wiederum durch die

verhältnismäßig geringen Windkräfte kleinere Abmessungen, so daß sie am meisten durch die Wärmewirkung betroffen werden. Der Einfluß der ungleichen Erwärmung der Gurte (Hauptträger) ist aus diesem Grunde bedeutend größer als bei Fachwerkhauptträgern, bei denen die Bemessung der Gurte und Füllungsglieder für dieselbe Belastung erfolgt.

Die Ermittlung der durch ungleiche Erwärmung der Hauptträger auftretenden Kräfte bietet keine Schwierigkeit. Jedoch erfordert sie eine recht große Rechenarbeit, wenn Genauigkeit gefordert wird.

Die Eigenart dieses Problems —

Ein Belastungsfall,
Parallelgurtiges Fachwerk,
Einfache Führung der Füllungsstäbe —

ermöglicht es jedoch, für alle in der Praxis vorkommenden Fälle geschlossene Formeln für die Größe der Stabkräfte bei dieser Belastung anzugeben.

Die vorliegende Arbeit will in dieses Problem, für das Engesser in seinem Werk „Zusatzkräfte“ Seite 49 ff. Näherungsformeln entwickelt hat, die für den Großbrückenbau erforderliche Klarheit bringen, indem sie die auftretenden Kräfte nachweist und konstruktive Lösungen zur Vermeidung oder teilweisen Ausschaltung dieser Belastung angibt.

2. Voraussetzungen und Annahmen.

Für die statische Ermittlung der auftretenden Kräfte sind folgende Voraussetzungen gemacht:

a) Die Belastung bestehe aus einem gleichmäßig auf die ganze Brückenlänge auftretenden Wärmeunterschied von Δt Grad. Und zwar sei von einer Ausgangstemperatur ausgehend der eine Gurt um $+\frac{1}{2}\Delta t$ Grad erwärmt, der andere um $-\frac{1}{2}\Delta t$ Grad abgekühlt.

b) Dieser Wärmeunterschied gleiche sich über die Füllungsstäbe geradlinig aus, so daß sich die Länge dieser Stäbe im statisch bestimmten Hauptsystem nicht ändere.

c) Der Elastizitätsmodul aller Stäbe sei der gleiche.

d) Die Fachwerke seien ideale Fachwerke mit reibungslosen Gelenkknoten.

e) Die Lager seien starr.

Um die entwickelten Formeln nicht zu umständlich zu gestalten, werden folgende Annahmen gemacht, die in den meisten Fällen auch zutreffen:

a) Die Brücke sei gerade und habe gerade Hauptträger.

b) Die Feldteilung sei konstant.

c) Der Windverband liege in einer Ebene. Er sei nicht gewölbt, und die Schwerachsen der Hauptträger, Querträger und Verbandsstreben liegen in einer Höhe mit den Lagern.

d) Die Querschnitte einer jeden Stabgruppe — Gurte (Hauptträger), Pfosten (Querträger) und Streben — seien unter sich gleich. — Es wird nach Ermittlung der Formeln gezeigt werden, mit welchem Mittelwert diese theoretische Forderung erfüllt wird.

3. Bezeichnungen.

Es werden folgende Bezeichnungen gebraucht:

L	Stützweite
b	Hauptträgerabstand
a	Feldweite
d	Stablänge der Streben
$n = \frac{L}{a}$	Felderzahl
φ	Neigungswinkel der Streben
F_1	Querschnitt der Gurtstäbe
F_2	Querschnitt der Pfosten
F_3	Querschnitt der Streben
E	Elastizitätsmodul
O bzw. U	Stabkraft der Gurtstäbe
V	Stabkraft der Pfosten
D	Stabkraft der Streben
X_a, X_b, X_c	Unbestimmte Auflagerkräfte
$X_1, X_2, X_3 \ldots$	Sonstige unbestimmte Kräfte
δ	Verschiebungsgröße
m, i	Ganze Zahlen zwischen 1 und n
ε_t	Linearer Ausdehnungskoeffizient infolge Erwärmung

$$\delta' = E\,\delta$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{b}{a} \\ \sec\varphi &= \frac{d}{a} \end{aligned}\right\} \text{ in den Formeln für die Systemgruppe } A$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{b}{2\cdot a} \\ \sec\varphi &= \frac{d}{a} \end{aligned}\right\} \text{ in den Formeln für die Systemgruppe } B$$

B. Statischer Teil.

1. Behandelte Systeme.

Es werden die gebräuchlichsten Windverbandssysteme für beide Lagerungen nach Abb. 1 und Abb. 2 (siehe S. 1) untersucht (Tafel I).

Die Systeme werden auch weiterhin unter dieser Ordnungsnummer laufen. Die verschiedenen Ausbildungen jedes Systems werden mit a, b, c bezeichnet und in den betreffenden Abschnitten behandelt (vgl. Tafel II, S. 11).

In der Tafel I sind die untersuchten Systeme für $n = 4$ und die Lagerung nach Abb. 1 gezeichnet. Die Bemerkung über die statische Bestimmtheit bezieht sich nur auf die innerliche Bestimmt- bzw. Unbestimmtheit.

Bei Lagerung nach Abb. 1 treten hierzu noch drei äußerlich statisch unbestimmte Auflagergrößen.

Bei Lagerung nach Abb. 2 noch eine statisch unbestimmte Auflagergröße.

2. Formelentwicklungen.

Im folgenden sollen einige häufiger vorkommende Ausdrücke entwickelt werden, damit die Ableitung der endgültigen Formeln übersichtlicher gestaltet werden kann.

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} X_a\,\delta_{aa} + X_b\,\delta_{ab} + X_c\,\delta_{ac} &= 0 \\ X_a\,\delta_{ab} + X_b\,\delta_{bb} + X_c\,\delta_{bc} &= \delta_{b0} \\ X_a\,\delta_{ac} + X_b\,\delta_{bc} + X_c\,\delta_{cc} &= 0 \end{aligned}$$

hat folgende Auflösung:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} X_a &= \frac{-\delta_{ab}\,\delta_{cc} + \delta_{ac}\,\delta_{bc}}{\delta_{aa}\,\delta_{bb}\,\delta_{cc} + 2\,\delta_{ab}\,\delta_{ac}\,\delta_{bc} - \delta_{aa}\,\delta_{bc}^2 - \delta_{ab}^2\,\delta_{cc} - \delta_{bb}\,\delta_{ac}^2} \cdot \delta_{b0} \\ X_b &= \frac{\delta_{aa}\,\delta_{cc} - \delta_{ac}^2}{\delta_{aa}\,\delta_{bb}\,\delta_{cc} + 2\,\delta_{ab}\,\delta_{ac}\,\delta_{bc} - \delta_{aa}\,\delta_{bc}^2 - \delta_{ab}^2\,\delta_{cc} - \delta_{bb}\,\delta_{ac}^2} \cdot \delta_{b0} \\ X_c &= \frac{\delta_{ab}\,\delta_{ac} - \delta_{aa}\,\delta_{bc}}{\delta_{aa}\,\delta_{bb}\,\delta_{cc} + 2\,\delta_{ab}\,\delta_{ac}\,\delta_{bc} - \delta_{aa}\,\delta_{bc}^2 - \delta_{ab}^2\,\delta_{cc} - \delta_{bb}\,\delta_{ac}^2} \cdot \delta_{b0} \end{aligned} \right.$$

Tafel I

	Nr.	System	Zahl der Knotenpunkte	Zahl der Stäbe	Bemerkung
Gruppe A	1		Gurt $2(n+1)$ $k = 2(n+1)$	Gurt $2n$ Streben n Pfosten $n+1$ $s = 4n+1$	statisch bestimmt
Gruppe B	2a		Gurt $2(n+1)$ Streben n $k = 3n+2$	Gurt $2n$ Streben $2n$ Pfosten $2n+1$ $s = 6n+1$	statisch bestimmt
	2b		Gurt $2(n+1)$ Streben n $k = 3n+2$	Gurt $2n$ Streben $2n$ Pfosten $2n+1$ $s = 6n+1$	statisch bestimmt
	3		Gurt $2(n+1)$ Streben n $k = 3n+2$	Gurt $2n$ Streben $2n$ Pfosten $2n+1$ $s = 6n+1$	statisch bestimmt
	4		Gurt $2(n+1)$ Streben $n-1$ $k = 3n+1$	Gurt $2n$ Streben $2n$ Pfosten $2n$ $s = 6n$	einfach statisch unbestimmt
	5		Gurt $2(n+1)$ Streben $\frac{1}{2}n+1$ $k = \frac{5}{2}n+3$	Gurt $2n$ Streben $2n$ Pfosten $\frac{3}{2}n+2$ $s = \frac{11}{2}n+2$	$\frac{n}{2}-1$ fach statisch unbestimmt
	6		Gurt $2(n+1)$ Streben $\frac{1}{2}n$ $k = \frac{5}{2}n+2$	Gurt $2n$ Streben $2n$ Pfosten $\frac{3}{2}n+1$ $s = \frac{11}{2}n+1$	$\frac{n}{2}$ fach statisch unbestimmt
	7		———	———	———

Bezeichnungen: k = Zahl der Knotenpunkte
s = —"— —"— Stäbe

Bei den meisten Systemen wird jedoch

$$\delta_{aa} = \delta_{cc}$$
$$\delta_{ab} = -\delta_{bc}$$
$$\delta_{ac} = 0$$

so daß sich obige Ergebnisse vereinfachen:

$$(2) \quad \begin{cases} X_a = -X_c = -\dfrac{\delta_{ab}}{\delta_{aa}\,\delta_{bb} - 2\,\delta_{ab}^2} \cdot \delta_{b0} \\ X_b = \dfrac{\delta_{aa}}{\delta_{aa}\,\delta_{bb} - 2\,\delta_{ab}^2} \cdot \delta_{b0} \end{cases}$$

Bei der Bildung der Summenformeln $\sum O_m$ bezw. $\sum U_m$ und $\sum O_m{}^2$ bezw. $\sum U_m{}^2$ gelangt man zu den folgenden Ausdrücken.

Allgemein ist:

$$(3) \quad \sum_{m=1,2,3}^{m=n} m = \frac{n\,(1+n)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Ersetzt man m durch $m-1$, so wird

$$(4) \quad \sum_{1}^{n} (m-1) = \frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

Ersetzt man in Formel (3) n durch $n-1$, so erhält man das gleiche Ergebnis

$$(4\,a) \quad \sum_{1}^{n-1} m = \frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

$$(5) \quad \sum_{m=2,4,6}^{m=n} m = 2 \sum_{m=1,2,3}^{m=\frac{n}{2}} m = 2\,\frac{\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)}{2} = \frac{n^2+2\,n}{4}$$

Allgemein ist:

$$(6) \quad \sum_{m=1,2,3}^{m=n} m^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} = \frac{2\,n^3+3\,n^2+n}{6}$$

Ersetzt man m durch $m-1$, so wird

$$(7) \quad \sum_{1}^{n} (m-1)^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2\,n-1)}{6} = \frac{2\,n^3-3\,n^2+n}{6}$$

Ersetzt man in Formel (6) n durch $n-1$, so erhält man das gleiche Ergebnis

$$(7a) \qquad \sum_{1}^{n-1} m^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} = \frac{2n^3-3n^2+n}{6}$$

$$(8) \qquad \sum_{m=2,4,6}^{m=n} m^2 = 4 \sum_{m=1,2,3}^{m=\frac{n}{2}} m^2 = 4\,\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

3. System 1, Gruppe A.

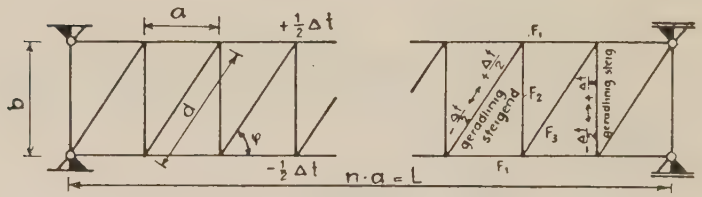


Abb. 3.

Das System ist innerlich bestimmt und äußerlich dreifach statisch unbestimmt. Als statisch Unbestimmte werden die drei überzähligen Lagerkräfte X_a, X_b, X_c eingeführt.

Hauptsystem:

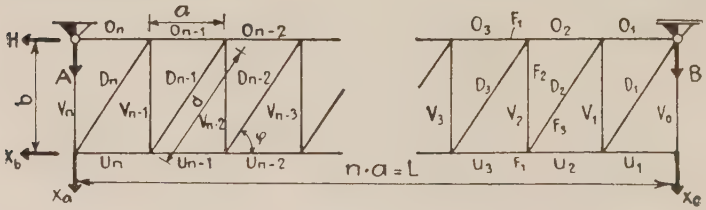


Abb. 4.

Stabkräfte bei den Belastungszuständen . . . . .

Zustand $X_a = -1$

$V_n = -1$ Alle übrigen Stabkräfte gleich null

Zustand $X_c = -1$

$V_0 = -1$ Alle übrigen Stabkräfte gleich null

Zustand $X_b = -1$

Auflagerkräfte: $A = -B = -\frac{b}{n \cdot a}$; $H = +1$

Obergurt: $O_m = +\frac{m}{n}$

Untergurt: $U_m = -\frac{m-1}{n}$

Pfosten: $V_m = +\frac{b}{n \cdot a}$, jedoch $V_0 = 0$

Streben: $D_m = -\frac{d}{n \cdot a}$

Bei n Feldern hat das System

$2n$ Gurtstäbe
$n + 1$ Pfosten
n Streben

Verschiebungsgrößen.

$$\delta'_{aa} = \delta'_{cc} = +\frac{b}{F_2}; \quad \delta'_{ac} = 0$$

$$\delta'_{ab} = -\frac{b^2}{n \cdot a \cdot F_2}; \quad \delta'_{bc} = 0$$

$$\delta'_{bb} = +\frac{a}{n^2 \cdot F_1}\left[\sum_1^n m^2 + \sum_1^n (m-1)^2\right] + \frac{n \cdot b^3}{n^2 a^2 F_2} + \frac{n \cdot d^3}{n^2 a^2 F_3}$$

und mit Hilfe von Formel 6 und 7

$$\delta'_{bb} = +\frac{1}{n \cdot a^2}\left[\frac{2n^2+1}{3}\frac{a^3}{F_1} + \frac{b^3}{F_2} + \frac{d^3}{F_3}\right]$$

Die Verschiebungsgröße aus dem Wärmeunterschied erstreckt sich nur über die Gurtstäbe. Die Füllungsstäbe haben über ihre ganze Länge konstante Stabkraft und konstanten Querschnitt. Der Wärmeunterschied gleicht sich jedoch geradlinig zwischen den Gurten aus, so daß sich die Stablänge der Füllungsstäbe im Hauptsystem nicht ändert.

$$\delta'_{b0} = +\varepsilon_t \cdot \frac{\Delta t}{2} E \cdot a \cdot \frac{1}{n}\left[\sum_1^n m + \sum_1^n (m-1)\right]$$

und mit Hilfe von Formel 3 und 4

$$\delta'_{b0} = +\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot a \cdot n$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen 1 ein, so ergibt sich bei Lagerung nach Abb. 1:

$$X_a = \frac{-\delta'_{ab}\cdot\delta'_{an}}{\delta'^{2}_{aa}\cdot\delta'_{bb}-\delta'^{2}_{ab}\,\delta'_{aa}}\cdot\delta'_{bo} = \frac{-\delta'_{ab}}{\delta'_{aa}\,\delta'_{bb}-\delta'^{2}_{ab}}\cdot\delta'_{bo}$$

$$X_a = +\frac{\dfrac{b^2}{n\cdot a\cdot F_2}}{\dfrac{b}{F_2}\cdot\dfrac{1}{n\cdot a^2}\left[\dfrac{2n^2+1}{3}\dfrac{a^3}{F_1}+\dfrac{b^3}{F_2}+\dfrac{d^3}{F_3}\right]-\dfrac{b^4}{n^2a^2F_2^2}}\cdot\varepsilon_t\frac{\Delta t}{2}\cdot E\cdot a\cdot n$$

$$X_a = +\frac{\varepsilon_t\dfrac{\Delta t}{2}E\cdot\operatorname{tg}\varphi\, n\cdot F_1}{\dfrac{2n^2+1}{3}+\dfrac{n-1}{n}\operatorname{tg}^3\varphi\dfrac{F_1}{F_2}+\sec^3\varphi\dfrac{F_1}{F_3}}$$

$$X_b = \frac{\delta'_{aa}}{\delta'_{aa}\,\delta'_{bb}-\delta'^{2}_{ab}}\cdot\delta'_{bo}$$

$$X_b = +\frac{\dfrac{b}{F_2}}{\dfrac{b}{F_2}\dfrac{1}{n\cdot a^2}\left[\dfrac{2n^2+1}{3}\dfrac{a^3}{F_1}+\dfrac{n-1}{n}\dfrac{b^3}{F_2}+\dfrac{d^3}{F_3}\right]}\cdot\varepsilon_t\frac{\Delta t}{2}E\cdot a\cdot n$$

$$X_b = +\frac{\varepsilon_t\dfrac{\Delta t}{2}E\cdot n^2\cdot F_1}{\dfrac{2n^2+1}{3}+\dfrac{n-1}{n}\operatorname{tg}^3\varphi\dfrac{F_1}{F_2}+\sec^3\varphi\dfrac{F_1}{F_3}}$$

$$X_c = 0$$

Bei Lagerung nach Abb. 2 fallen die Auflagerkräfte X_a und X_c fort, so daß

$$X_b = \frac{\delta'_{bo}}{\delta'_{bb}} = \frac{\varepsilon_t\dfrac{\Delta t}{2}E\cdot a\cdot n}{\dfrac{1}{n\cdot a^2}\left[\dfrac{2n^2+1}{3}\dfrac{a^3}{F_1}+\dfrac{b^3}{F_2}+\dfrac{d^3}{F_3}\right]}$$

$$X_b = \frac{\varepsilon_t\dfrac{\Delta t}{2}En^2F_1}{\dfrac{2n^2+1}{3}+\operatorname{tg}^3\varphi\dfrac{F_1}{F_2}+\sec^3\varphi\dfrac{F_1}{F_3}}$$

Tafel II.

Nr.	Lagerung nach Abb.	Felderzahl	System	f_2
1a	1	beliebig		$\frac{n-1}{n}$
1b	2	beliebig		$\frac{n}{n}$
1c	2	beliebig		$\frac{n}{n}$
1d	1	gerade		$\frac{n-2}{n}$
1e	2	gerade		$\frac{n-2}{n}$
1f	2	gerade		$\frac{n}{n}$
1g	1	beliebig		$\frac{o}{n}$
1h	2	gerade		$\frac{2}{n}$
1i	2	gerade		$\frac{o}{n}$
1k	2	ungerade		$\frac{1}{n}$
1m	2	ungerade		$\frac{1}{n}$

Für andere Führung der Streben ist der Rechnungsgang entsprechend. Die Schlußformel bleibt bis auf das Glied, daß die Formänderung der Pfosten umfaßt, dieselbe. Dieses Glied ist jedoch dann, wenn die Pfosten durch die Querträger gebildet werden, so klein, daß diese Unterschiede praktisch vernachlässigt werden können. Es lautet nach der jeweiligen Führung der Füllungsstäbe in vorstehender Tafel II $f_2 \operatorname{tg}^3\varphi \frac{F_1}{F_2}$, so daß für System 1 allgemein geschrieben werden kann.

$$X_b = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E n^2 \cdot F_1}{\frac{2n^2+1}{3} + f_2 \operatorname{tg}^3\varphi \frac{F_1}{F_2} + \sec^3\varphi \frac{F_1}{F_3}} \tag{9}$$

Die Auflagerkräfte senkrecht zur Brückenachse werden bei Lagerung nach Abb. 1 und 2 stets

$$A = -B = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \operatorname{tg}\varphi n F_1}{\frac{2n^2+1}{3} + f_2 \operatorname{tg}^3\varphi \frac{F_1}{F_2} + \sec^3\varphi \frac{F_1}{F_3}} \tag{10}$$

Sie greifen bei Lagerung nach Abb. 1 in den Lagern an, in denen die Strebe des Endfeldes mündet.

4. System 2a, Gruppe B.

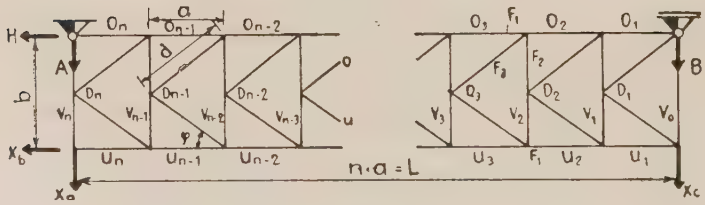


Abb. 5.

Das System ist innerlich statisch bestimmt und äußerlich dreifach (einfach) statisch unbestimmt gelagert. Als Unbestimmte werden die drei (eine) überzähligen Auflagerdrücke mit X_a, X_b, X_c (X_b) eingeführt.

Stabkräfte bei den Belastungszuständen:

Zustand $X_a = -1$.

$V_n = -1$. Alle übrigen Stabkräfte gleich null.

Zustand $X_c = -1$.

$V_0 = -1$. Alle übrigen Stabkräfte gleich null.

Zustand $X_b = -1$.

Auflagerkräfte: $A = -\frac{b}{n \cdot a}$; $B = +\frac{b}{n \cdot a}$; $H = +1$

Obergurt: $O_m = +\frac{m}{n}$

Untergurt: $U_m = -\frac{m}{n}$

Pfosten: Obere $V_m^0 = +\frac{b}{2n \cdot a}$

Untere $V_m^u = -\frac{b}{2n \cdot a}$

$V_0 = -\frac{b}{2n \cdot a}$; $V_n^0 = +\frac{b}{n \cdot a}$; $V_n^u = 0$

Streben: Obere $D_m^0 = -\frac{d}{n \cdot a}$

Untere $D_m^u = +\frac{d}{n \cdot a}$

Bei n Feldern hat das System $2n$ Gurtstäbe,
$n+1$ Pfosten,
$2n$ Streben.

Verschiebungsgrößen:

$$\delta'_{aa} = +\delta'_{cc} = +\frac{b}{F_2}; \quad \delta'_{ac} = 0$$

$$\delta'_{ab} = -\frac{b^2}{2n \cdot a \cdot F_2} = -\delta'_{bc}$$

$$\delta'_{bb} = \frac{2a}{n^2 \cdot F_1} \sum_1^n m^2 + 2(n-1)\frac{b^3}{8n^2 \cdot a^2 \cdot F_2} + \frac{b^3}{4n^2 \cdot a^2 \cdot F_2} + \frac{b^3}{2n^2 \cdot a^2 \cdot F_2} + 2n\frac{d^3}{n^2 \cdot a^2 \cdot F_3}$$

$$\delta'_{bb} = \frac{1}{n \cdot a^2}\left[\frac{2n^2+3n+1}{3}\frac{a^3}{F_1} + \frac{n+2}{4n} \cdot \frac{b^3}{F_2} + 2\frac{d^3}{F_3}\right]$$

Die Verschiebungsgröße aus dem Wärmeunterschied erstreckt sich über alle Stäbe des Systems, mit Ausnahme von V_0 und V_n^u.

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} \cdot E \frac{2a}{n} \left[\sum_1^n m + \frac{1}{2} \cdot 2(n-1) \frac{b}{2n \cdot a} \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{n \cdot a} \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2n \frac{d}{n \cdot a} d \right]$$

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} \cdot E \left[a(n+1) + \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{a} \right]$$

Unter Berücksichtigung, daß

$$d^2 - \frac{b^2}{4} = a^2$$

ist, wird wieder $$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot a \cdot n$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen 2 ein, so erhält man:

$$X_a = -X_c = + \frac{\frac{b^2}{2n \cdot a \cdot F_2} \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot a \cdot n}{\frac{b}{F_2} \cdot \frac{1}{n \cdot a^2} \left[\frac{2n^2+3n+1}{3} \cdot \frac{a^3}{F_1} + \frac{n+2}{4n} \cdot \frac{b^3}{F_2} + 2 \frac{d^3}{F_3} \right] - \frac{2b^4}{4n^2 a^2 F_2^2}}$$

$$(11) \quad X_a = -X_c = + \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot n F_1}{\frac{2n^2+3n+1}{3} + 2 \operatorname{tg}^3 \varphi \frac{F_1}{F_2} + 2 \sec^3 \varphi \frac{F_1}{F_3}}$$

$$(12) \quad X_b = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot n^2 \cdot F_1}{\frac{2n^2+3n+1}{3} + 2 \operatorname{tg}^3 \varphi \cdot \frac{F_1}{F_2} + 2 \sec^3 \varphi \cdot \frac{F_1}{F_3}}$$

Für Lagerung nach Abb. 2 erhält man:

$$(13) \quad X_b = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot n^2 \cdot F_1}{\frac{2n^2+3n+1}{3} + \frac{2(n+2)}{n} \cdot \operatorname{tg}^3 \varphi \cdot \frac{F_1}{F_2} + 2 \sec^3 \varphi \frac{F_1}{F_3}}$$

System 2b.

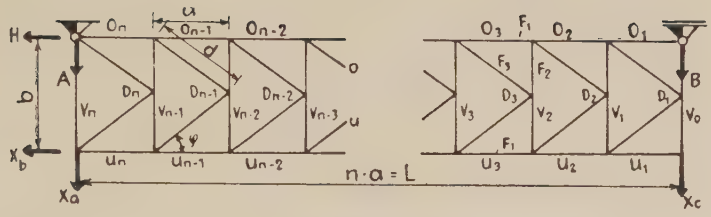


Abb. 6.

Verlaufen die Spitzen der Strebendreiecke nach den beweglichen Lagern zu, so ist die Entwicklung entsprechend. In der Schlußformel ändert sich nur das Nennerglied, das von den Gurten herrührt.

Und zwar wird:

$$X_a = -X_c = + \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \operatorname{tg} \varphi \, n F_1}{\frac{2n^2 - 3n + 1}{3} + 2 \operatorname{tg}^3 \varphi \frac{F_1}{F_2} + 2 \sec^3 \varphi \frac{F_1}{F_3}} \tag{14}$$

und

$$X_b = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E n^2 F_1}{\frac{2n^2 - 3n + 1}{3} + 2 \operatorname{tg}^3 \varphi \frac{F_1}{F_2} + 2 \sec^3 \varphi \frac{F_1}{F_3}} \tag{15}$$

für Lagerung nach Abb. 1.

Für Lagerung nach Abb. 2 wird

$$X_b = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E n^2 F_1}{\frac{2n^2 - 3n + 1}{3} + \frac{2(n+2)}{n} \operatorname{tg}^3 \varphi \frac{F_1}{F_2} + 2 \sec^3 \varphi \frac{F_1}{F_3}} \tag{16}$$

5. System 3, Gruppe B.

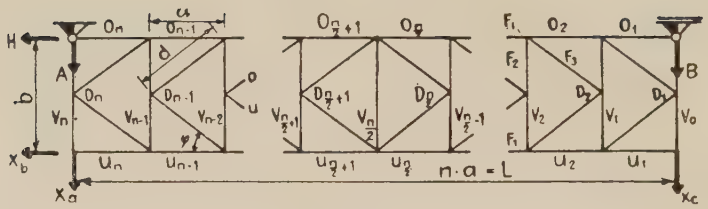


Abb. 7.

Das System ist innerlich statisch bestimmt und äußerlich dreifach (einfach) statisch unbestimmt gelagert. Als Unbestimmte werden die drei überzähligen Auflagerkräfte mit X_a, X_b, X_c eingeführt.

Stabkräfte bei den Belastungszuständen:

Zustand $X_a = -1$.

$V_n = -1$. Alle übrigen Stabkräfte gleich null.

Zustand $X_c = -1$.

$V_0 = -1$. Alle übrigen Stabkräfte gleich null.

Zustand $X_b = -1$.

Auflagerkräfte: $A = -B = -\frac{b}{n \cdot a}$; $H = +1$

Obergurt: Rechts der Mitte: $O_m = +\frac{m-1}{n}$

Links der Mitte: $O_m = +\frac{m}{n}$

Untergurt: Rechts der Mitte: $U_m = -\frac{m-1}{n}$

Links der Mitte: $U_m = -\frac{m}{n}$

Pfosten: Rechts der Mitte oben: $V_m^0 = -\frac{b}{2\,n \cdot a}$

unten: $V_m^u = +\frac{b}{2\,n \cdot a}$

Links der Mitte oben: $V_m^0 = +\frac{b}{2\,n \cdot a}$

unten: $V_m^u = -\frac{b}{2\,n \cdot a}$

$$V_0^0 = -\frac{b}{n \cdot a}; \quad V_0^u = 0$$

$$V_n^0 = +\frac{b}{n \cdot a}; \quad V_n^u = 0$$

$$V_{\frac{n}{2}} = 0$$

Streben: Rechts der Mitte oben: $D_m^0 = +\frac{d}{n \cdot a}$

unten: $D_m^u = -\frac{d}{n \cdot a}$

Links der Mitte oben: $D_m^0 = -\frac{d}{n \cdot a}$

unten: $D_m^u = +\frac{d}{n \cdot a}$

Bei n Feldern hat das System: $2n$ Gurtstäbe
$n+1$ Pfosten
$2n$ Streben

Verschiebungsgrößen:

$$\delta'_{aa} = \delta'_{cc} = \frac{b}{F_2}; \quad \delta'_{ac} = 0$$

$$\delta'_{ab} = -\frac{b^2}{2n \cdot a \cdot F_2} = -\delta'_{bc}$$

$$\delta'_{bb} = \frac{2a}{n^2 \cdot F_1}\left[\sum_0^{\frac{n}{2}-1} m^2 + \sum_{\frac{n}{2}+1}^{n} m^2\right] + 2(n-2)\frac{b^3}{8n^2 \cdot a^2 \cdot F_2} + 2\frac{b^3}{2n^2 \cdot a^2 \cdot F_2} + 2n\frac{d^3}{n^2 \cdot a^2 \cdot F_3}$$

$$\delta'_{bb} = \frac{2a}{n^2 \cdot F_1}\left[\sum_1^n m^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + \frac{n+2}{4} \cdot \frac{b^3}{n^2 \cdot a^2 \cdot F_2} + \frac{2d^3}{n \cdot a^2 \cdot F_3}$$

$$d'_{bb} = \frac{1}{n \cdot a^2}\left[\frac{4n^2+3n+2}{6} \cdot \frac{a^3}{F_1} + \frac{n+2}{4n} \cdot \frac{b^3}{F_2} + 2\frac{d^3}{F_3}\right]$$

Die Verschiebungsgröße aus dem Wärmeunterschied erstreckt sich nur über die Gurtstäbe, da sich die Glieder der Füllungsstäbe rechts und links von der Mitte ausgleichen.

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot \frac{2a}{n} \left[\sum_1^n m - \frac{n}{2} \right]$$

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot a \cdot n$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen 2 ein, so erhält man:

$$(17) \quad X_a = + \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \operatorname{tg} \varphi n \cdot F_1}{\frac{4n^2+3n+2}{6} + 2\operatorname{tg}^3\varphi \frac{F_1}{F_2} + 2\sec^3\varphi \frac{F_1}{F_3}} = - X_c$$

$$(18) \quad X_b = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot n^2 \cdot F_1}{\frac{4n^2+3n+2}{6} + 2\operatorname{tg}^3\varphi \frac{F_1}{F_2} + 2\sec^3\varphi \frac{F_1}{F_3}}$$

Bei Lagerung nach Abb. 2 erhält man:

$$(19) \quad X_b = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot n^2 \cdot F_1}{\frac{4n^2+3n+2}{6} + \frac{2(n+2)}{n} \operatorname{tg}^3\varphi \frac{F_1}{F_2} + 2\sec^3\varphi \frac{F_1}{E_3}}$$

6. System 4, Gruppe B.

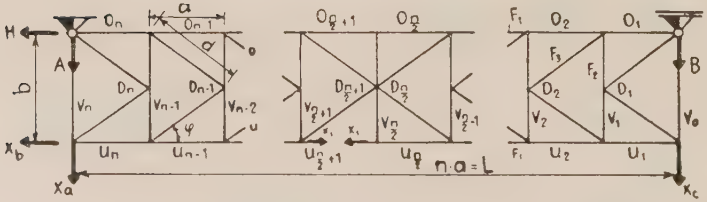


Abb. 8.

Das System ist innerlich einfach und äußerlich dreifach (einfach) statisch unbestimmt. Als Unbestimmte werden die überzähligen Auf-

lagerkräfte mit X_a, X_b und X_c und die Stabkraft im Untergurt $U_{\frac{n}{2}+1}$ mit X_1 eingeführt.

Stabkräfte bei den Belastungszuständen:

Zustand $X_a = -1$

$V_n = -1$. Alle übrigen Stabkräfte gleich null.

Zustand $X_c = -1$

$V_0 = -1$. Alle übrigen Stabkräfte gleich null.

Zustand $X_b = -1$

Auflagerkräfte: $A = -B = -\frac{b}{n \cdot a}$; $H = +1$

Obergurt: Rechts der Mitte: $O_m = +\frac{m}{n}$

Links der Mitte: $O_m = +\frac{m-1}{n}$

Untergurt: Rechts der Mitte: $U_m = -\frac{m}{n}$

Links der Mitte: $U_m = -\frac{m-1}{n}$

Jedoch: $O_{\frac{n}{2}} = O_{\frac{n}{2}+1} = +\frac{b}{na}\frac{n}{2} \cdot a\frac{2}{b} = +1$

$$U_{\frac{n}{2}} = U_{\frac{n}{2}+1} = 0$$

Pfosten: Rechts der Mitte oben: $V_m^0 = +\frac{b}{2n \cdot a}$

unten: $V_m^u = -\frac{b}{2n \cdot a}$

Links der Mitte oben: $V_m^0 = -\frac{b}{2n \cdot a}$

unten: $V_m^u = +\frac{b}{2n \cdot a}$

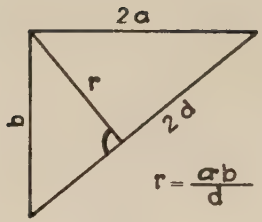


Abb. 8a.

Jedoch: $V_0 = -\frac{b}{2n \cdot a}$; $V_n = +\frac{b}{2n \cdot a}$

$$V^0_{\frac{n}{2}-1} = V^u_{\frac{n}{2}+1} = +\frac{n+2}{2}\,\frac{d}{n \cdot a} \cdot \frac{b}{2d}$$

$$= +\frac{n+2}{4} \cdot \frac{b}{n \cdot a}$$

$$V^u_{\frac{n}{2}-1} = V^0_{\frac{n}{2}+1} = +\frac{n-2}{2}\,\frac{d}{n \cdot a} \cdot \frac{b}{2d}$$

$$= +\frac{n-2}{4} \cdot \frac{b}{n \cdot a}$$

$$V_{\frac{n}{2}} = 0$$

Streben: Rechts der Mitte oben: $D^0_m = -\frac{d}{n \cdot a}$

unten: $D^u_m = +\frac{d}{n \cdot a}$

Links der Mitte oben: $D^0_m = +\frac{d}{n \cdot a}$

unten: $D^u_m = -\frac{d}{n \cdot a}$

Jedoch: $D^u_{\frac{n}{2}} = D^0_{\frac{n}{2}+1} = -\frac{b}{n \cdot a}\left(\frac{n}{2}-1\right) a\,\frac{d}{a \cdot b}$

$$= -\frac{n-2}{2}\,\frac{d}{n \cdot a}$$

$$D^{0}_{\frac{n}{2}} = D^{u}_{\frac{n}{2}+1} = -\frac{b}{n \cdot a}\left(\frac{n}{2}+1\right) a \frac{d}{a \cdot b}$$

$$= -\frac{n+2}{2} \cdot \frac{d}{n \cdot a}$$

Zustand $X_1 = -1$

$$U_{\frac{n}{2}} = U_{\frac{n}{2}+1} = -1$$

$$O_{\frac{n}{2}} = O_{\frac{n}{2}+1} = -1$$

$$D_{\frac{n}{2}} = D_{\frac{n}{2}+1} = +\frac{d}{a}$$

$$V_{\frac{n}{2}-1} = V_{\frac{n}{2}+1} = -\frac{b}{2a}$$

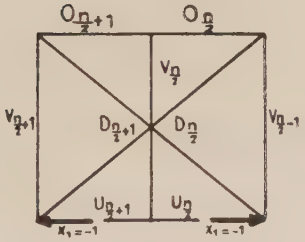


Abb. 8b.

Alle übrigen Stabkräfte gleich null.

Bei n Feldern hat das System $2n$ Gurtstäbe
$n+1$ Pfosten
$2n$ Streben

Verschiebungsgrößen:

$$\delta'_{aa} = \delta'_{cc} = \frac{b}{F_2};\ \delta'_{ac} = 0$$

$$\delta'_{ab} = -\delta'_{bc} = -\frac{b^2}{2n \cdot a \cdot F_2}$$

$$\delta'_{a1} = \delta'_{c1} = 0$$

$$\delta'_{bb} = \frac{2a}{n^2 \cdot F_1}\left[\sum_1^{n-1} m^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2\right] + 2(n-4)\frac{b^3}{8n^2 \cdot a^2 \cdot F_2}$$

$$+ 2\frac{b^3}{4n^2 \cdot a^2 \cdot F_2} + 2\left(\frac{n+2}{4}\right)^2 \cdot \frac{b^3}{2n^2 \cdot a^2 \cdot F_2} + 2\left(\frac{n-2}{4}\right)^2 \cdot \frac{b^3}{2n^2 \cdot a^2 \cdot F_2}$$

$$+ 2(n-2) \cdot \frac{d^3}{n^2 \cdot a^2 \cdot F_3} + 2\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \frac{d^3}{n^2 \cdot a^2 \cdot F_3} + 2\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \cdot \frac{d^3}{n^2 \cdot a^2 \cdot F_3}$$

$$\delta'_{bb} = \frac{2a}{n^2 \cdot F_1}\left[\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} - \frac{n^2}{4} + n^2\right]$$

$$+ \frac{b^3}{n^2 \cdot a^2 \cdot F_2} \cdot \left[\frac{n-4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{n^2 + 4n + 4}{16} + \frac{n^2 - 4n + 4}{16}\right]$$

$$+ \frac{d^3}{n^2 \cdot a^2 \cdot F_3}\left[2(n-2) + \frac{n^2 + 4n + 4}{2} + \frac{n^2 - 4n + 4}{2}\right]$$

$$\delta'_{bb} = \frac{a}{n \cdot F_1} \cdot \frac{4n^2 + 3n + 2}{6} + \frac{b^3}{n \cdot a^2 \cdot F_2} \cdot \frac{n+2}{8} + \frac{d^3}{n \cdot a^2 \cdot F_3} \cdot (n+2)$$

$$\delta'_{bb} = \frac{1}{n \cdot a^2}\left[\frac{4n^2 + 3n + 2}{6} \cdot \frac{a^3}{F_1} + \frac{n+2}{8} \cdot \frac{b^3}{F_2} + (n+2) \cdot \frac{d^3}{F_3}\right]$$

$$\delta'_{b1} = -\frac{2a}{F_1} - 2\frac{n+2}{4} \cdot \frac{b^3}{4n \cdot a^2 \cdot F_2} - 2\frac{n-2}{4} \cdot \frac{b^3}{4n \cdot a^2 \cdot F_2}$$

$$- 2\frac{n+2}{2} \cdot \frac{d^3}{n \cdot a^2 \cdot F_3} - 2\frac{n-2}{2} \cdot \frac{d^3}{n \cdot a^2 \cdot F_3}$$

$$\delta'_{b1} = -\frac{2a}{F_1} - \frac{b^3}{4a^2 \cdot F_2} - \frac{2d^3}{a^2 \cdot F_3}$$

$$\delta'_{b1} = -\frac{1}{a^2}\left[2\frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b^3}{F_2} + 2\frac{d^3}{F_3}\right]$$

$$\delta'_{11} = +\frac{4a}{F_1} + 2\frac{b^3}{4a^2 \cdot F_2} + 4\frac{d^3}{a^2 \cdot F_3}$$

$$\delta'_{11} = +\frac{2}{a^2}\left[2\frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b^3}{F_2} + 2\frac{d^3}{F_3}\right] = -2\delta'_{b1}$$

Die Verschiebungsgröße aus dem Wärmeunterschied erstreckt sich nur über die Gurtstäbe, da sich die Glieder der Füllungsstäbe rechts und links von der Mitte ausgleichen.

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot \frac{2a}{n} \left[\sum_1^{n-1} m - \frac{n}{2} + n \right]$$

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot \frac{2a}{n} \left[\frac{n^2 - n}{2} - \frac{n}{2} + n \right]$$

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} \cdot E \cdot a \cdot n$$

$$\delta'_{10} = 0$$

Die Elastizitätsgleichungen für dieses System lauten unter Berücksichtigung, daß

$\delta'_{ac} = 0$; $\delta'_{a1} = 0$; $\delta'_{c1} = 0$

$\delta'_{aa} = \delta'_{cc}$; $\delta'_{ab} = -\delta'_{bc}$; $\delta'_{11} = -2\delta'_{b1}$ sind:

$$+ X_a \cdot \delta'_{aa} + X_b \cdot \delta'_{ab} = 0$$
$$+ X_a \cdot \delta'_{ab} + X_b \cdot \delta'_{bb} - X_c \cdot \delta'_{ab} + X_1 \cdot \delta'_{b1} = \delta'_{b0}$$
$$- X_b \cdot \delta'_{ab} + X_c \cdot \delta'_{aa} = 0$$
$$+ X_b \cdot \delta'_{b1} - 2 X_1 \cdot \delta_{b1} = 0$$

. . . . . .

$$X_a = -X_c = -\frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{aa} \cdot \delta'_{bb} - 2\delta'^2_{ab} + \frac{1}{2}\delta'_{b1} \cdot \delta'_{aa}} \cdot \delta'_{b0}$$

$$X_b = \frac{\delta'_{aa}}{\delta'_{aa} \cdot \delta'_{bb} - 2\delta'^2_{ab} + \frac{1}{2}\delta'_{b1} \cdot \delta'_{aa}} \cdot \delta'_{b0}$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \frac{\delta'_{aa}}{\delta'_{aa} \cdot \delta'_{bb} - 2\delta'^2_{ab} + \frac{1}{2}\delta'_{b1} \cdot \delta'_{aa}} \cdot \delta'_{b0} = \frac{1}{2} X_b$$

. . . . . .

Δ_n = Nennerdeterminante

$$\Delta_n = + \frac{b}{F_2} \cdot \frac{1}{n \cdot a^2} \left[\frac{4n^2 + 3n + 2}{6} \cdot \frac{a^3}{F_1} + \frac{n+2}{8} \frac{b^3}{F_2} + (n+2) \frac{d^3}{F_3} \right]$$
$$- 2 \frac{b^4}{4n^2 \cdot a^2 \cdot F_2^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{F_2} \cdot \frac{1}{a^2} \left[2 \frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b^3}{F_2} + 2 \frac{d^3}{F_3} \right]$$

$$(20)\quad X_a = -X_c = +\frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot n \cdot F_1}{\frac{4n^2-3n+2}{6} + \frac{2(n-2)}{n} \cdot \operatorname{tg}^3\varphi \frac{F_1}{F_2} + 2\sec^3\varphi \frac{F_1}{F_3}}$$

$$(21)\quad X_b = 2X_1 = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot n^2 \cdot F_1}{\frac{4n^2-3n+2}{6} + \frac{2(n-2)}{n} \cdot \operatorname{tg}^3\varphi \frac{F_1}{F_2} + 2\sec^3\varphi \frac{F_1}{F_3}}$$

Bei Lagerung nach Abb. 2 erhält man:

$$X_b \cdot \delta'_{bb} + X_1 \cdot \delta'_{b1} = \delta'_{b0}$$

$$X_b \cdot \delta'_{b1} - 2X_1 \cdot \delta'_{b1} = 0$$

. . . . . .

$$X_b = 2X_1 = \frac{\delta'_{b0}}{\delta'_{bb} + \frac{1}{2}\delta'_{b1}}$$

$$(22)\quad X_b = 2X_1 = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot n^2 \cdot F_1}{\frac{4n^2-3n+2}{6} + 2\operatorname{tg}^3\varphi \frac{F_1}{F_2} + 2\sec^3\varphi \frac{F_1}{F_3}}$$

7. System 5, Gruppe B.

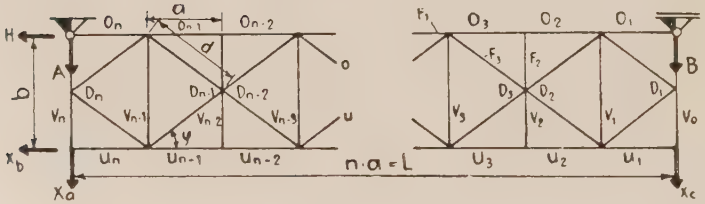


Abb. 9.

Das System ist innerlich $\frac{n}{2} - 1$ fach statisch unbestimmt, da sämtliche in den Rhomben liegende Pfosten bis auf einen Stabilisierungsstab überzählig sind.

Die überzähligen Auflagerkräfte werden mit X_a, X_b, X_c eingeführt.

Bei Lagerung nach Abb. 1 ist das System zur Längsachse symmetrisch, die Belastung antimetrisch. Daraus folgt, daß auch die Stabkräfte zur Längsachse antimetrisch sein müssen. Also:

$$O_m = -U_m$$

und

$$D^u_m = -D^0_m$$

Für die Pfosten ergibt sich, daß

$$V_1 = V_3 = V_5 = \cdots V_{n-1} = 0$$

sein müssen.

Hierdurch sind für Lagerung nach Abb. 1 die inneren Unbestimmten bekannt.

Das statisch bestimmt gelagerte Hauptsystem ist für ungleiche Erwärmung, für die sich keine Auflagerkräfte ergeben, auch ein symmetrisches System mit antimetrischer Belastung, so daß hierfür ebenfalls die ungeraden Pfostenstabkräfte gleich Null werden.

Für die Zustände $X_a = -1$ und $X_c = -1$ erhalten nur die Endpfosten Stabkräfte. Daher müssen im statisch bestimmt gelagerten Hauptsystem, obwohl es für den Zustand $X_b = -1$ nicht symmetrisch ist, die ungeraden Pfostenstabkräfte gleich Null werden. Denn in der endgültigen Stabkraft für ungleiche Erwärmung

$$V = V_0 - V_a X_a - V_b X_b - V_c X_c = 0$$

sind V_0, V_a und V_c nach Obigem Null, so daß auch V_b Null werden muß.

Die Stabkräfte für Lagerung nach Abb. 2 werden sodann erhalten, indem das System noch mit den negativen Auflagerkräften X_a und X_c der Lagerung nach Abb. 1 belastet wird.

Stabkräfte des innerlich unbestimmten Hauptsystems bei den Belastungszuständen:

Zustand $X_a = -1$.

$V_n = -1$. Alle übrigen Stabkräfte gleich Null.

Zustand $X_c = -1$.

$V_0 = -1$. Alle übrigen Stabkräfte gleich Null.

Zustand $X_b = -1$.

Auflagerkräfte: $A = -B = -\frac{b}{n\,a}$; $H = +1$

Gurtstäbe ungeradzahlig: $O_m = -U_m = +\frac{m-1}{n}$

geradzahlig: $O_m = -U_m = +\frac{m}{n}$

Pfosten: $V_0^0 = -\frac{b}{n\,a}, \quad V_0^u = 0$

$$V_n^0 = +\frac{b}{n\,a}, \quad V_n^u = 0$$

Alle übrigen Pfosten sind Nullstäbe.

Streben ungeradzahlig: $D_m^0 = -D_m^u = +\frac{d}{n\,a}$

geradzahlig: $D_m^0 = -D_m^u = -\frac{d}{n\,a}$

Das System hat bei n Feldern

$2n$ Gurtstäbe
$n+1$ Pfosten
$2n$ Streben

Verschiebungsgrößen:

$$\delta'_{aa} = \delta'_{cc} = +\frac{b}{F_2}; \quad \delta'_{ac} = 0$$

$$\delta'_{ab} = -\delta'_{bc} = -\frac{b^2}{2\,n\,a\,F_2}$$

$$\delta'_{bb} = \frac{4\,a}{n^2\,F_1}\left[\sum_{2,4,6}^{n} m^2 - \frac{n^2}{2}\right] + 2\,\frac{b^3}{2\,n^2\,a^2\,F_2} + 2\,n\,\frac{d^3}{n^2\,a^2\,F_3}$$

$$\delta'_{bb} = \frac{1}{n\,a^2}\left[\frac{2\,n^2+4}{3}\,\frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{n}\,\frac{b^3}{F_2} + 2\,\frac{d^3}{F_3}\right]$$

Die Verschiebungsgröße aus dem Wärmeunterschied erstreckt sich nur über die Gurtstäbe, da sich die Glieder der Füllungsstäbe in den beiden Endpfosten bzw. in den beiden Streben eines jeden Feldes ausgleichen.

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t\,\frac{\Delta t}{2}\,E\,\frac{4\,a}{n}\left[\sum_{2,4,6}^{n} m - \frac{n}{2}\right]$$

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t\,\frac{\Delta t}{2}\,E\,a\,n$$

Die Unbestimmten werden demnach unter Berücksichtigung, daß

$$\delta'_{aa} = \delta'_{cc}; \quad \delta'_{ab} = -\delta'_{bc} \text{ und } \delta'_{ac} = 0$$

nach den Gleichungen 2

$$X_a = -X_c = -\frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{aa}\,\delta'_{bb} - 2\,\delta'^2_{ab}}\,\delta'_{b0}$$

$$X_a = -X_c = \frac{\dfrac{b^2}{2\,n\,a\,F_2}\,\varepsilon_t\,\dfrac{\Delta t}{2}\,E\,a\,n}{\dfrac{b}{F_2}\,\dfrac{1}{n\,a^2}\left[\dfrac{2n^2+4}{3}\,\dfrac{a^3}{F_1} + \dfrac{1}{n}\,\dfrac{b^3}{F_2} + 2\,\dfrac{d^3}{F_3}\right] - 2\,\dfrac{b^4}{4\,n^2\,a^2\,F_2^2}}$$

$$X_a = -X_c = \frac{\varepsilon_t\,\dfrac{\Delta t}{2}\,E\,\mathrm{tg}\,\varphi\,n\,F_1}{\dfrac{2\,n^2+4}{3} + \dfrac{4}{n}\,\mathrm{tg}^3\,\varphi\,\dfrac{F_1}{F_2} + 2\,\sec^3\varphi\,\dfrac{F_1}{F_3}} \tag{23}$$

$$X_b = +\frac{\delta'_{aa}}{\delta'_{aa}\,\delta'_{bb} - 2\,\delta'^2_{ab}}\,\delta'_{b0}$$

$$X_b = \frac{\varepsilon_t\,\dfrac{\Delta t}{2}\,E\,n^2\,F_1}{\dfrac{2\,n^2+4}{3} + \dfrac{4}{n}\,\mathrm{tg}^3\,\varphi\,\dfrac{F_1}{F_2} + 2\,\sec^3\varphi\,\dfrac{F_1}{F_3}} \tag{24}$$

Für Lagerung nach Abb. 2 muß also das System noch für die Belastung mit den negativen Auflagerdrücken X_a und X_c untersucht werden. (Der Index $^+$ deutet auf diese Belastung.)

$$V_n^+ = -X_a \qquad V_0^+ = -X_c$$

$$\delta'^+_{b0} = -\left(X_a - X_c\right)\frac{b^2}{2\,n\,a\,F_2} = +\left(X_a - X_c\right)\delta'_{ab}$$

$$X_b^+ = \frac{\delta'_{aa}}{\delta'_{aa}\,\delta'_{bb} - 2\,\delta'^2_{ab}}\,\delta'_{b0} + \frac{\delta'^+_{b0}}{\delta'_{bb}}$$

$$X_b^+ = \frac{\delta'_{aa}\,\delta'_{b0}}{\delta'_{aa}\,\delta'_{bb} - 2\,\delta'^2_{ab}} - \frac{2\,\delta'^2_{ab}}{\delta'_{aa}\,\delta'^2_{bb} - 2\,\delta'^2_{ab}\,\delta'_{bb}}$$

$X_b^+ = \dfrac{\delta'_{b0}}{\delta'_{bb}}$, d. h. auch für den Fall der zur Längsachse unsymmetrischen Lagerung nach Abb. 2 werden die ungeraden Pfostenstabkräfte gleich Null.

$$X_b^+ = \frac{\varepsilon_t\,\dfrac{\Delta t}{2}\,E\,n^2\,F_1}{\dfrac{2\,n^2+4}{3} + \dfrac{8}{n}\,\mathrm{tg}^3\,\varphi\,\dfrac{F_1}{F_2} + 2\,\sec^3\varphi\,\dfrac{F_1}{F_3}} \tag{25}$$

Da die Stabkräfte in sämtlichen Pfosten gleich Null sind, gelten diese Formeln auch für Rhombenfachwerke, in denen die Pfosten ganz oder teilweise fehlen. Ist nur ein Stabilisierungsstab eingezogen, so gelten die Formeln gleichfalls, wobei die Lage des Stabilisierungsstabes gleichgültig ist. Bei fehlenden Pfosten ist jedoch zu beachten, daß sich die Feldweite a auf eine halbe Rhombenlänge bezieht. Ebenso ist die Länge der Streben d die Länge einer Rhombenseite.

8. System 6, Gruppe B.

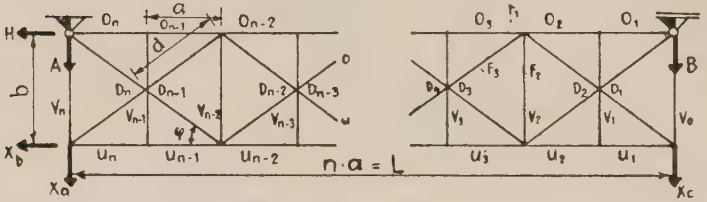


Abb. 10.

Das System ist innerlich $\frac{n}{2}$ fach statisch unbestimmt, da in sämtlichen Feldern eine Strebe überzählig ist, und die überzähligen zweier benachbarter Felder zu je einer Unbestimmten zusammengefaßt werden können.

Die überzähligen Auflagerkräfte werden mit

$$X_a, \; X_b \text{ und } X_c$$

eingeführt.

Dieses System ist ebenso wie das vorher untersuchte für Lagerung nach Abb. 1 zur Längsachse symmetrisch, die Belastung antimetrisch. Die Gurte und Streben eines Feldes müssen entgegengesetzt gleiche Stabkräfte erhalten und die Pfostenstabkräfte bis auf die Endpfosten zu Null werden.

Stabkräfte des innerlich unbestimmten Hauptsystems bei den Belastungszuständen:

Zustand $X_a = -1$.

$V_n = -1$. Alle übrigen Stabkräfte gleich Null.

Zustand $X_c = -1$.

$V_0 = -1$. Alle übrigen Stabkräfte gleich Null.

Zustand $X_b = -1$.

Auflagerkräfte: $A = -B = -\frac{b}{na}$; $H = +1$

Gurtstäbe: ungeradzahlig $O_m = -U_m = +\frac{m}{n}$

geradzahlig $O_m = -U_m = +\frac{m-1}{n}$

Pfosten: $V_0 = -\frac{b}{2na}$; $V_n = +\frac{b}{2na}$

Alle übrigen Pfostenstabkräfte gleich Null.

Streben: ungeradzahlig $D_m^0 = -D_m^u = -\frac{d}{na}$

geradzahlig $D_m^0 = -D_m^u = +\frac{d}{na}$

Das System hat bei n Feldern

$2n$ Gurtstäbe,
$n+1$ Pfosten,
$2n$ Streben.

Verschiebungsgrößen:

$$\delta'_{aa} = \delta'_{cc} = +\frac{b}{F_2}; \quad \delta'_{ac} = 0$$

$$\delta'_{ab} = -\delta'_{bc} = -\frac{b^2}{2na F_2}$$

$$\delta'_{bb} = \frac{4a}{n^2 F_1} \sum_{1,3,5}^{n-1} m^2 + 2\frac{b^3}{4n^2 a^2 F_2} + 2n\frac{d^3}{n^2 a^2 F_3}$$

und mit Hilfe von Formel 6 und 8

$$\delta'_{bb} = \frac{1}{na^2}\left[\frac{2n^2-2}{3}\frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{2n}\frac{b^3}{F_2} + 2\frac{d^3}{F_3}\right]$$

Die Verschiebungsgröße aus dem Wärmeunterschied erstreckt sich wieder nur über die Gurtstäbe

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \frac{4a}{n} \sum_{1,3,5}^{n-1} m$$

und mit Hilfe von Formel 3 und 5

$$d'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E a n$$

Damit wird

$$X_a = -X_c = +\frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E n \operatorname{tg}\varphi F_1}{\frac{2n^2-2}{4} + 2\sec^3\varphi \frac{F_1}{F_3}} \tag{26}$$

$$X_b = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E n^2 F_1}{\frac{2n^2-2}{4} + 2\sec^3\varphi \frac{F_1}{F_3}} \tag{27}$$

Wird das System bei Lagerung nach Abb. 1 mit den negativen Auflagerkräften X_a und X_c belastet, so wird genau so wie bei dem vorigen System die Auflagerkraft X_b für Lagerung nach Abb. 2 erhalten.

$$X_b = \frac{\delta'_{b0}}{\delta'_{bb}} = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E n^2 F_1}{\frac{2n^2-2}{4} + \frac{4}{n}\operatorname{tg}^3\varphi \frac{F_1}{F_2} + 2\sec^3\varphi \frac{F_1}{F_3}} \tag{28}$$

Verteilte sich bei Lagerung nach Abb. 1 die Querkraft auf die beiden Streben eines jeden Feldes gleichmäßig, so trifft dieses für Lagerung nach Abb. 2 nicht mehr zu. Um die Strebenstabkräfte zu berechnen, muß daher wieder das bestimmte Hauptsystem herangezogen werden.

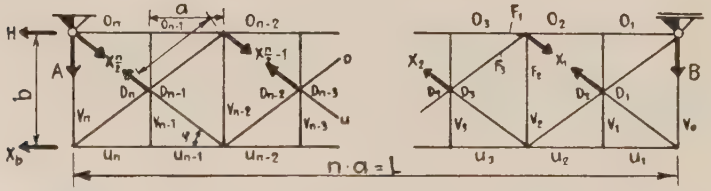


Abb. 11a.

Stabkräfte bei den Belastungszuständen:

Zustand $X_b = -1$.

Auflagerkräfte: $A = -B = -\frac{b}{na}$; $H = +1$

Gurte: geradzahlig $O_m = + \frac{m}{n}$

$$U_m = - \frac{m-2}{n}$$

ungeradzahlig $O_m = + \frac{m+1}{n}$

$$U_m = - \frac{m-1}{n}$$

Pfosten: geradzahlig $V_m = + \frac{b}{n\,a}$

jedoch $V_0 = 0$

ungeradzahlig $V_m = 0$

Streben: $D_1^0 = D_2^u = D_3^0 = D_4^u = \cdots - \frac{2\,d}{n\,a}$

Zustand $X_i = -1$, wobei $i = \frac{m}{2}$

$$O_m = O_{m-1} = U_m = U_{m-1} = + \frac{a}{d}$$

$$V_m = V_{m-2} = + \frac{b}{2\,d} \qquad V_{m-1} = 0$$

$$D_m = D_{m-1} = -1$$

Verschiebungsgrößen:

$$\delta'_{bb} = \frac{4\,a}{n^2 F_1}\left[\sum_{2,4,6}^{n} m^2 - \frac{n^2}{2}\right] + \frac{n}{2}\frac{b^3}{n^2 a^2 F_2} + n\frac{4\,d^3}{n^2 a^2 F_3}$$

und mit Hilfe von Formel 8

$$\delta'_{bb} = \frac{4\,a}{n^2 F_1}\left[\frac{2n^2+4}{3}\frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{2}\frac{b^3}{F_2} + 4\frac{d^3}{F_3}\right]$$

$$\delta'_{b1} = \frac{1}{n\,a\,d}\left[4\frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{2}\frac{b^3}{F_2} + 4\frac{d^3}{F_3}\right]$$

$$\delta'_{bi} = \frac{1}{n\,a\,d}\left[4\frac{a^3}{F_1} + \frac{b^3}{F_2} + 4\frac{d^3}{F_3}\right]$$

$$\delta'_{ii} = \frac{1}{d^2}\left[4\frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{2}\frac{b^3}{F_2} + 4\frac{d^3}{F_3}\right]$$

$$\delta'_{i,i+1} = \frac{1}{4}\frac{b^3}{d^2 F_2}$$

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \frac{4a}{n}\left[\sum_{2,4,6}^{n} m - \frac{n}{2}\right]$$

$$\delta'_{b0} = \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E a n \qquad \delta'_{i0} = 0$$

Elastizitätsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&X_b \delta'_{bb} + X_1 \delta'_{b1} + X_2 \delta'_{bi} + X_3 \delta'_{bi} + X_4 \delta'_{bi} && = \delta'_{b0}\\
&X_b \delta'_{b1} + X_1 \delta'_{ii} + X_2 \delta'_{i,i+1} && = 0\\
&X_b \delta'_{bi} + X_1 \delta'_{i,i+1} + X_2 \delta'_{ii} + X_3 \delta'_{i,i+1} && = 0\\
&X_b \delta'_{bi} + X_2 \delta'_{i,i+1} + X_3 \delta'_{ii} + X_4 \delta'_{i,i+1} && = 0\\
&X_b \delta'_{bi} + X_{\frac{n}{2}-1} \delta'_{i,i+1} + X_{\frac{n}{2}} \delta'_{ii} && = 0
\end{aligned}$$

Da in diesem Gleichungssystem X_b nach den obigen Ausführungen schon bekannt ist, sind nur noch die inneren $\frac{n}{2}$ Unbekannten zu ermitteln. Diese erhalten allgemein die Werte

$$X_i = -(1 + C_i)\frac{d}{n a} X_b \tag{29}$$

Und zwar ist aus der Symmetrie zu erkennen, daß

$$X_1 + X_{\frac{n}{2}} = X_2 + X_{\frac{n}{2}-1} = \cdots = -\frac{2d}{n a} X_b$$

ist, oder

$$C_1 = -C_{\frac{n}{2}}$$

$$C_2 = -C_{\frac{n}{2}-1} \text{ usw.}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die erste Gleichung wird wieder die in Formel 28 ermittelte Größe von X_b erhalten. Das Einsetzen der allgemeinen Ausdrücke für die inneren Unbestimmten in die zweite bis letzte Gleichung führt zu folgendem Gleichungssystem für die additiven Größen C_i.

Zweite Gleichung

$$X_b \left[\frac{1}{n a d} \left(4 \frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{2} \frac{b^3}{F_2} + 4 \frac{d^3}{F_3} \right) - \frac{1}{d^2} \frac{d}{n a} \left(4 \frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{2} \frac{b^3}{F_2} + 4 \frac{d^3}{F_3} \right) \right.$$
$$\left. - \frac{d}{n a} C_1 \delta'_{ii} - \frac{1}{4} \frac{b^3}{d^2 F_2} \frac{d}{n a} - \frac{d}{n a} C_2 \delta'_{i,i+1} \right] = 0$$

i-te Gleichung

$$X_b \left[\frac{1}{n a d} \left(4 \frac{a^3}{F_1} + \frac{b^3}{F_2} + 4 \frac{d^3}{F_3} \right) - 2 \frac{1}{4} \frac{b^3}{d^2 F_2} \frac{d}{n a} - \frac{d}{n a} C_{i-1} \delta'_{i,i+1} \right.$$
$$\left. - \frac{d}{n a} C_{i+1} \delta'_{i,i+1} - \frac{1}{d^2} \frac{d}{n a} \left(4 \frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{2} \frac{b^3}{F_2} + 4 \frac{d^3}{F_3} \right) - \frac{d}{n a} C_i \delta'_{ii} \right] = 0$$

Letzte Gleichung

$$X_b \left[\frac{1}{n a d} \left(4 \frac{a^3}{F_1} + \frac{b^3}{F_2} + 4 \frac{d^3}{F_3} \right) - \frac{1}{4} \frac{b^3}{d^2 F_2} \frac{d}{n a} - \frac{d}{n a} C_{\frac{n}{2}-1} \delta'_{i,i+1} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{d^2} \frac{d}{n a} \left(4 \frac{a^3}{F_1} + \frac{1}{2} \frac{b^3}{F_2} + 4 \frac{d^3}{F_3} \right) - \frac{d}{n a} C_{\frac{n}{2}} \delta'_{ii} \right] = 0$$

Hieraus entsteht ein Gleichungssystem für die Unbekannten C_i

$$C_1 \delta'_{ii} + C_2 \delta'_{i,i+1} = -\frac{1}{4} \frac{b^3}{d^2 F_2} = -\delta'_{i,i+1}$$
$$C_1 \delta'_{i,i+1} + C_2 \delta'_{ii} + C_3 \delta'_{i,i+1} = 0$$
$$C_2 \delta'_{i,i+1} + C_3 \delta'_{ii} + C_4 \delta'_{i,i+1} = 0$$
$$C_2 \delta'_{i,i+1} + C_1 \delta'_{ii} = -\delta'_{i,i+1}$$

mit der Lösung

$$C_1 = -\cfrac{\delta'_{i,i+1}}{\delta'_{ii} - \cfrac{\delta'^2_{i,i+1}}{\delta'_{ii} - \cfrac{\delta'_{i,i+1}}{\delta'_{ii} - \cdots}}}$$

$$C_2 = +\cfrac{\delta'^2_{i,i+1}}{\left[\delta'_{ii} - \cfrac{\delta'^2_{i,i+1}}{\delta'_{ii} - \cfrac{\delta'^2_{i,i+1}}{\delta'_{ii} - \cdots}} \right] \left[\delta'_{ii} - \cfrac{\delta'^2_{i,i+1}}{\delta'_{ii} - \cdots} \right]}$$

usw.

Siehe Beispiele.

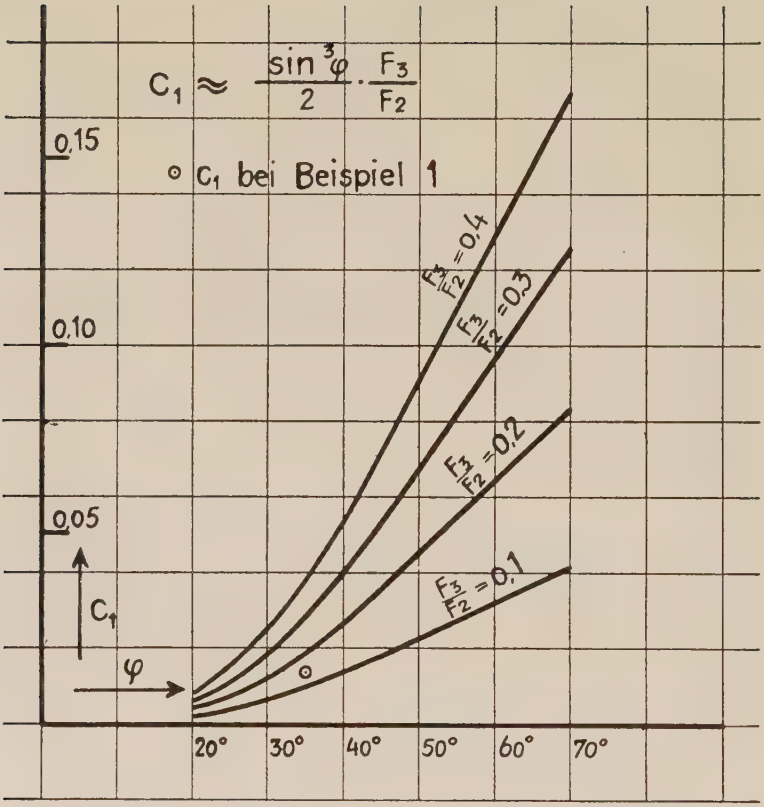


Abb. 11b.

Abschätzung der C_i-Werte:

Da $\delta'_{i,i+1}$ stets klein gegen δ'_{ii} ist, genügt für praktische Fälle die erste Näherung

$$C_1 = -\frac{\delta'_{i,i+1}}{\delta'_{ii}}$$

$$C_2 = +\left[\frac{\delta'_{i,i+1}}{\delta'_{ii}}\right]^2$$

usw., die in den ungünstigten Fällen, wenn auch die Pfosten reine Windverbandsstäbe sind und $\varphi = 60^0$ ist, nur um höchstens 5 % zu klein gegenüber dem genauen Wert ist.

Wenn jedoch — wie in den meisten Fällen — die Pfosten durch die Querträger gebildet werden, können in δ_{ii} die Glieder, die von den Gurten und von den Pfosten herrühren, gegenüber dem Strebenglied vernachlässigt werden, so daß das größte additive Glied C_1

$$C_1 \approx -\frac{b^3}{4\,d^2 F_2}\,\frac{F_3}{4\,d}$$

(30)
$$C_1 \approx \frac{\sin^3\varphi}{2}\,\frac{F_3}{F_2}$$

wird und in den bezeichneten Fällen wohl nie größer als 0,1 $\left(\varphi = 60^0;\ \frac{F_3}{F_2} = \frac{1}{3}\right)$, im allgemeinen rund 0,02 werden wird.

9. System 7.

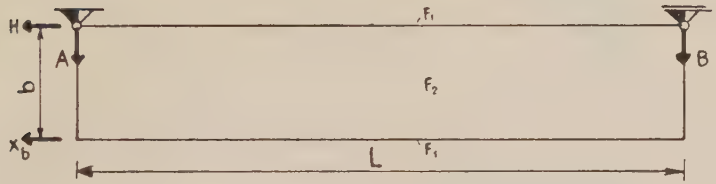


Abb. 12.

Das vollwandige System wird durch eine steife Fahrbahnplatte aus Flach-, Tonnen- oder Buckelblechen mit der Stärke t gebildet. Diese gewölbten Bleche werden als Stegblech eines vollwandigen Trägers angesehen. Untersucht wird nur Lagerung nach Abb. 2, so daß dieses System äußerlich einfach statisch unbestimmt gelagert ist. Die Unbestimmte wird mit X_b bezeichnet.

Zustand: $X_b = -1$

Auflagerkräfte: $A = -B = -\frac{b}{L}$; $\quad H = +1$

Momentenfläche nach Abb. 12a:

$$\max M = b$$

Querkraftfläche nach Abb. 12b:

$$Q = \frac{b}{L} \text{ konstant}$$

$$\delta'_{bb} = \int \frac{M^2\,ds}{I} + \int \frac{E \cdot Q^2\,ds}{G \cdot F_s}, \quad \text{wobei: } \frac{E}{G} = \frac{2\,(m+1)}{m} = 2{,}6$$

$$\text{für } m = \frac{10}{3}$$

Beim Querschnitt nach Abb. 12c ist das Trägheitsmoment:

$$I = \frac{t \cdot b^3}{12} + 2\,F_1 \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$t \cdot b = F_2 \qquad I = \frac{b^2}{12}\,(F_2 + 6\,F_1)$$

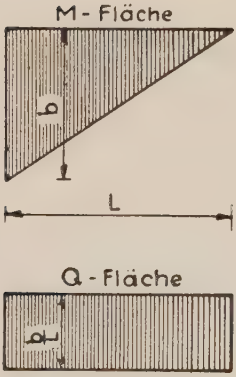


Abb. 12a, b.

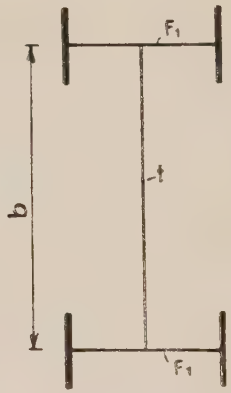


Abb. 12c.

Der Schubquerschnitt: $F_s = F_2$

$$\delta'_{bb} = \frac{\frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot L}{\frac{b^2}{12}\,(F_2 + 6\,F_1)} + \frac{1 \cdot \frac{b^2}{L^2} \cdot L \cdot 2{,}6}{F_2}$$

$$\delta'_{bb} = \frac{4\,L}{F_2 + 6\,F_1} + \frac{2{,}6\,b^2}{L \cdot F_2}$$

Die Verschiebungsgröße infolge Temperaturunterschied erstreckt sich nur auf die Momente.

$$\delta'_{b0} = \int \frac{M \cdot \Delta t \, \varepsilon_t \cdot E}{b} ds$$

$$\delta'_{b0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot \Delta t \, \varepsilon_t \cdot L \cdot E}{b} = \varepsilon_t \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot E \cdot L$$

Der unbestimmte Auflagerdruck wird damit:

$$X_b = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot L}{\frac{4L}{F_2 + 6F_1} + \frac{2{,}6\, b^2}{L \cdot F_2}} = \frac{\delta'_{b0}}{\delta'_{bb}}$$

(31)
$$X_b = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E \cdot F_1}{\frac{4}{6 + \frac{F_2}{F_1}} + 2{,}6 \frac{b^2}{L^2} \cdot \frac{F_1}{F_2}}$$

10. Zusammenstellung der Ergebnisse.

Durch die ungleiche Erwärmung der Hauptträger entstehen vorstehend berechnete Auflagerdrücke. Die senkrecht zur Brückenlängsachse wirkenden Lagerdrücke X_a und X_c sind gering und haben auch auf die Stabkräfte — bis auf die Endpfosten — keinen Einfluß. Dagegen erstreckt sich der Einfluß von X_b über alle Systemstäbe.

Während die in den Gurten und Pfosten erzeugten Normalkräfte im Vergleich zu den aus den senkrechten Lasten sich ergebenden Momenten im allgemeinen zu vernachlässigen sind, können die Normalkräfte in den Streben die Stabkräfte aus der Windbelastung erreichen. Die Stabkräfte aus Winddruck werden außerdem nach der Mitte zu rasch kleiner, die Stabkräfte aus ungleicher Erwärmung der Hauptträger dagegen sind über die ganze Brückenlänge entsprechend der konstanten Querkraft gleich. Daher können die rechnerischen Beanspruchungen der auf Winddruck bemessenen mittleren Windverbandsstreben die zulässige Grenze überschreiten, wenn die Hauptträger ungleichmäßig erwärmt werden. Die weitere Untersuchung wird sich daher nur auf die Strebenkräfte und die Auflagerkraft X_b erstrecken.

Die Auflagerkraft X_b kann man bei allen Systemen allgemein schreiben:

$$X_b = + \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} \cdot E \cdot n^2 \cdot F_1}{f_1(n) + f_2 \operatorname{tg}^3 \varphi \frac{F_1}{F_2} + f_3 \sec^3 \varphi \frac{F_1}{F_3}}$$

(32)
$$\begin{cases} X_b = + \dfrac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} \cdot E \cdot n^2 \cdot F_1}{N}, & \text{wobei} \\ N = f_1(n) + f_2 \operatorname{tg}^3 \varphi \dfrac{F_1}{F_2} + f_3 \sec^3 \varphi \dfrac{F_1}{F_3} & \text{ist.} \end{cases}$$

Aus der Auflagerkraft X_b läßt sich die Stabkraft in den Streben, konstant über die ganze Brückenlänge, errechnen mit:

(33)
$$D_m = \pm \frac{d}{n \cdot a} \cdot X_b$$

(Für die Streben des Systems 6, Lagerung nach Abb. 2 wird nach (29)

$$D_m = \pm (1 + C_m) \frac{d}{na} X_b \Big)$$

$$D_m = \pm \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} \cdot E \cdot n^2 \cdot F_1}{N} \cdot \frac{d}{n \cdot a}$$

Hierin sind die Faktoren ε_t, $\frac{\Delta t}{2}$, E nur von dem Material und dem größten zu erwartenden Wärmeunterschied abhängig und sind für Flußstahl und die heute gültigen Vorschriften:

$\varepsilon_t = 0{,}000012$; $\Delta t = 15^0$

$E = 2100$ t/cm²

$$Z = \varepsilon_t \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot E = 0{,}000012 \cdot \frac{15}{2} \cdot 2100 = 0{,}1890 \text{ t/cm}^2$$

So wird schließlich mit $\frac{d}{a} = \sec \varphi$

$$D_m = \pm \frac{Z}{N} \cdot n \sec \varphi \cdot F_1 = \pm \frac{n \cdot \sec \varphi}{N} \cdot 0{,}1890 \cdot F_1$$

und mit

Tafel III

Nr.	Lage-rung	System	Nennerteile $f_1(n)$	f_2	f_3
1	1		$\frac{2n^2+1}{3}$	Siehe Tafel II	1
	2		$\frac{2n^2+1}{3}$		1
2a	1		$\frac{2n^2+3n+1}{3}$	2	2
	2		$\frac{2n^2+3n+1}{3}$	$\frac{2(n+2)}{n}$	2
2b	1		$\frac{2n^2-3n+1}{3}$	2	2
	2		$\frac{2n^2-3n+1}{3}$	$\frac{2(n+2)}{n}$	2
3	1		$\frac{4n^2+3n+2}{6}$	2	2
	2		$\frac{4n^2+3n+2}{6}$	$\frac{2(n+2)}{n}$	2
4	1		$\frac{4n^2-3n+2}{6}$	$\frac{2(n-2)}{n}$	2
	2		$\frac{4n^2-3n+2}{6}$	2	2
5	1		$\frac{2n^2+4}{3}$	$\frac{4}{n}$	2
	2		$\frac{2n^2+4}{3}$	$\frac{8}{n}$	2
6	1		$\frac{2n^2-2}{3}$	0	2
	2		$\frac{2n^2-2}{3}$	$\frac{4}{n}$	2

(34) $$K = \frac{n \cdot \sec \varphi}{N}$$

(35) $$\boxed{D_m = \pm\, 0{,}189\, K\, F_1}$$

In der vorstehenden Tabelle sind die verschiedenen Nennerteile N der verschiedenen Systeme zusammengestellt.

Das vollwandige System 7 läßt sich in diese Zusammenstellung nicht einordnen.

Vorstehende Formeln sind unter der Annahme berechnet, daß die Querschnitte der Gurte, Pfosten und Streben unter sich über die ganze Brückenlänge gleich sind. Da dieses meistens nicht zutrifft, sind für die Querschnittsgrößen F_1, F_2, F_3 folgende Mittelwerte einzuführen:

1. Wird allgemein ein Stab mit veränderlichem Querschnitt durch eine Achsialkraft beansprucht, so kann man einen Ersatzquerschnitt berechnen, mit dem das gleiche Teilintegral

$$E\delta = \sum \frac{S^2 s}{F}$$

entsteht.

$$E\delta = S^2 \left(\frac{a}{F_a} + \frac{b}{F_b} + \frac{c}{F_c} \right) = S^2 \frac{s}{F}$$

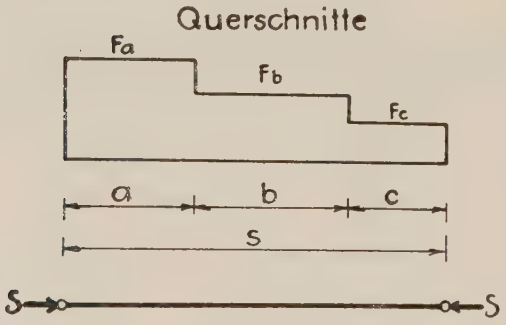


Abb. 13.

Der Ersatzquerschnitt ist also durch „reziproke Mittelbildung“ zu bestimmen.

$$F = \frac{s}{\frac{a}{F_a} + \frac{b}{F_b} + \frac{c}{F_c}}$$

2. F_1 = Mittelwert der Gurtquerschnitte.

Unter der Annahme, daß beide Hauptträger gleiche Abmessungen haben, die zur Brückenquerachse symmetrisch sind, ergibt sich folgendes:

In jedem Feld sind die Gurtstabkräfte konstant. Es kann also für jedes Feld der „reziproke" (siehe oben) Mittelquerschnitt F_m proportional zur Länge errechnet werden. Dann haben das erste und letzte, zweite und vorletzte usw. Feld gleiche Querschnitte.

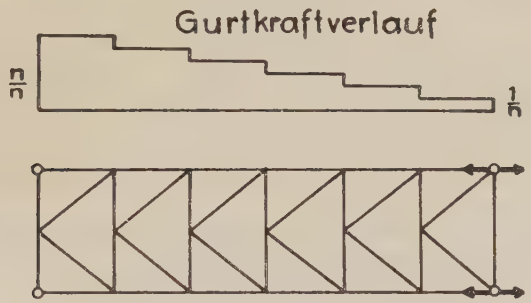


Abb. 14.

Unter Vernachlässigung der Unterschiede im Gurtkraftverlauf bei den einzelnen Systemen kann man den Ersatzquerschnitt des Gurtes ermitteln.

Das Teilintegral ist:

$$E\delta = \sum \frac{S^2 a}{F_1} = \frac{a}{n^2 F_1} \sum_1^n m^2 = \frac{a}{n^2 F_1} \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$E\delta = \frac{a}{n^2}\left(\frac{1^2+n^2}{F_{m1}} + \frac{2^2+(n-1)^2}{F_{m2}} + \cdots + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}{F_{m\frac{n}{2}}} \right)$$

Der Ersatzquerschnitt ist dann:

36) $$F_1 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6\left[\frac{1^2+n^2}{F_{m1}} + \frac{2^2+(n-1)^2}{F_{m2}} + \frac{3^2+(n-2)^2}{F_{m3}} + \cdots + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}{F_{m\frac{n}{2}}} \right]}$$

3. F_2 = Mittelwert der Pfostenquerschnitte.

Die Stabkräfte in den Pfosten sind konstant über die ganze Länge, so daß bei abgesetztem Querschnitt für jeden Pfosten der

„reziproke“ Mittelwert $F_{m,v}$ proportional zu den Längen errechnet werden kann. Außerdem sind stets alle Pfostenkräfte gleich groß, bis auf die Endpfosten, die bei einigen Systemen andere Kräfte erhalten. Ebenso sind bei den betrachteten symmetrischen, geraden Brücken alle Pfosten (Querträger) gleich ausgeführt, bis auf die Endquerträger, die im allgemeinen nach anderen Belastungen (Anheben der Brücke, halbe Belastungsbreite, Fahrbahnübergang) bemessen sind. Man kann also unter Vernachlässigung der Endpfosten setzen:

$$F_2 = F_{m,v} \tag{37}$$

Der gesuchte Mittelwert der Pfostenquerschnitte ist also der „reziproke“ Mittelwert eines normalen Pfostens.

4. F_3 = Mittelwert der Strebenquerschnitte.

Die Stabkräfte in den Streben sind konstant über ihre ganze Länge und ebenso in allen Feldern gleich. Die Stäbe haben durchgehend gleichen Querschnitt.

Der gesuchte Mittelwert der Strebenquerschnitte ist also das „reziproke“ Mittel aller Strebenquerschnitte.

$$F_3 = \frac{n}{2\left[\frac{1}{F_{D,1}} + \frac{1}{F_{D,2}} + \frac{1}{F_{D,3}} + \cdots \frac{1}{F_{D,\frac{n}{2}}}\right]} \tag{38}$$

Werden mit diesen gemittelten Querschnitten die aus ungleicher Erwärmung sich ergebenden Kräfte mit Hilfe vorstehender Formeln bestimmt, so werden auch für abgesetzte Querschnitte theoretisch genaue Ergebnisse erhalten.

11. Näherungsverfahren für Balken auf mehreren Stützen.

Für die Ermittlung der in jeder Öffnung konstanten Querkraft wird der Windverband als vollwandiger Träger angesehen, und der Einfluß der Querkräfte auf die Unbestimmten — wie allgemein üblich — vernachlässigt. Es wird nur Lagerung nach Abb. 2 untersucht. Bei Anordnung des festen Lagers an einem Brückenende liegt folgendes System für den Windverband vor (Abb. 15a).

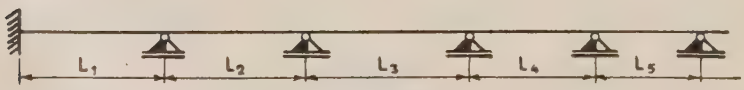


Abb. 15a.

Befindet sich das feste Lager an einer Innenstütze, so zerfällt der durchlaufende Balken in zwei Teile, deren jeder wie obiges System aufgebaut und getrennt für sich zu behandeln ist (Abb. 15b und 15c).

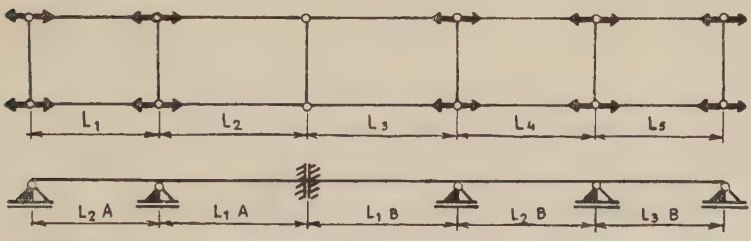


Abb. 15b und c.

Im allgemeinen wird es genügen, den Einfluß der ungleichen Erwärmung in dem Endfeld mit beweglichem Endauflager zu untersuchen. Die Innenfelder und das Endfeld mit festem Endauflager verhalten sich nämlich — je nach dem Verhältnis der Stützweiten — mehr oder weniger wie eim beiderseits eingespannter Träger, der durch diesen Belastungsfall keine Querkraft erhält.

Das Endfeld stellt einen einseitig elastisch eingespannten Träger dar, dessen Einspannungsmoment M_e aus dem durchlaufenden Träger leicht zu ermitteln ist. Ebenso kann für den einseitig starr eingespannten Träger das Einspannungsmoment M_s — auch unter Vernachlässigung des Querkrafteinflusses — mit $M_s = \frac{3}{2} \varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} b E F_1$ ermittelt werden, wenn das Trägheitsmoment des Balkens $I = 2 F_1 \frac{b^2}{4}$ gesetzt wird. Schließlich wird für das vorliegende Windverbandssystem nach Formel 32

$$X_{bs} = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E n^2 F_1}{N}$$

bestimmt.

Mit guter Annäherung ist dann der unbestimmte Auflagerdruck des durchlaufenden Fachwerkwindverbandes:

s = starre Einspannung

e = elastische Einspannung

$$X_{be} = \frac{\varepsilon_t \frac{\Delta t}{2} E n^2 F_1}{N} \frac{M_e}{M_s}$$

(39) $$X_{be} = \frac{2 n^2}{3 N} \frac{M_e}{b}$$

12. Vergleich der Systeme.

a) Grundsätzlich ist das System Nr. 1 (Gruppe A) mit einer Strebe in jedem Feld von den Systemen Nr. 2—6 (Gruppe B) mit zwei Streben in jedem Feld zu unterscheiden.

Die Streben der Systemgruppe A sind für Winddruck stets mit

$$D = \pm \frac{Q}{\sin \varphi}$$

zu berechnen.

Bei der Systemgruppe B kann die Querkraft auf beide Streben eines Feldes verteilt werden, so daß die Stabkraft

$$D = \pm \frac{1}{2} \frac{Q}{\sin \varphi}$$

wird. Nur bei System 6 muß in dem Fall, daß die ungeraden Pfosten fehlen (Strebenkreuz), bei Eisenbahnbrücken jede Strebe für eine Zugkraft von

$$\max D = + \frac{Q}{\sin \varphi}$$

und eine Druckkraft von

$$\min D = - \frac{1}{2} \frac{Q}{\sin \varphi}$$

berechnet werden.

Da Windverbandsstreben jedoch fast stets aus Winkelprofilen gebildet werden, deren Nietteilung sich so einrichten läßt, daß nur ein Nietloch in jedem Winkel abgezogen zu werden braucht, beträgt der Lochabzug nie mehr als 15% (⌞ 70·70·9). Andrerseits liegt der Schlankheitsgrad von Windverbandsstäben mit seltenen Ausnahmen im elastischen Bereich. Die Zugbeanspruchung darf also den Wert

$$\sigma_z = \frac{\max D}{F_n} = \frac{Q}{0{,}85\, F \sin \varphi} = \sigma_{zul}$$

nicht überschreiten; bzw. muß

$$\frac{Q}{F \sin \varphi} = 0{,}85\, \sigma_{zul}$$

sein. Bei Druckbeanspruchung muß

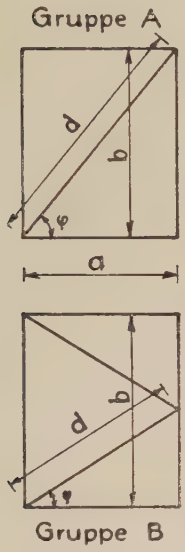


Abb. 16a und b.

$$\sigma_d = \frac{\omega \min D}{F} = \frac{\omega Q}{2 F \sin \varphi} = \sigma_{zul}$$

sein bzw. muß

$$\frac{Q}{F \sin \varphi} \leq \frac{2}{\omega}\, \sigma_{zul}$$

sein. Damit ergibt sich, daß bei einem größeren ω als $\frac{2}{0{,}85} = 2{,}35$ die Druckbeanspruchung maßgebend ist. Dieses trifft zu bei einem Schlankheitsgrad von

$$\lambda \approx 100 \text{ für St 37 und}$$
$$\lambda \approx 89 \text{ für St. 52,}$$

so daß aus obigen Gründen auch in diesem Fall fast stets der Stab nach

$$D = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\sin \varphi}$$

zu berechnen ist.

β) Der Winkel φ ist stets der Neigungswinkel der Streben gegen die Gurte. Einem Verhältnis von

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{Hauptträgerabstand}}{\text{Feldweite}}$$

entspricht also ein Neigungswinkel (s. Tafel IV).

Aus konstruktiven Gründen kommt jedoch nur ein Neigungswinkel von etwa 30^0 bis 60^0 zur Ausführung. Bei einem Verhältnis von $\frac{b}{a} = 1{,}2$ bis $1{,}7$ sind also rein geometrisch beide Gruppen möglich.

Ebenso kann anstatt eines der Systeme der Gruppe A unter Verdoppelung der Federzahl (siehe Abb. 9 und 10) auch System 5 oder 6 gewählt werden.

Tafel IV.

$\frac{a}{b}$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
φ_A	21° 50′	26° 30′	31° 00′	35° 00′	38° 40′	42° 00′	45° 00′	47° 40′
φ_B						24° 10′	26° 30′	28° 50′
$\frac{b}{a}$	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
φ_A	50° 10′	52° 30′	54° 30′	56° 20′	58° 00′	59° 30′	61° 00′	62° 10′
φ_B	31° 00′	33° 00′	35° 00′	36° 50′	38° 40′	40° 20′	42° 00′	43° 30′
$\frac{b}{a}$	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
φ_A								
φ_B	45° 00′	46° 20′	47° 40′	48° 00′	50° 10′	51° 20′	52° 30′	53° 30′
$\frac{b}{a}$	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
φ_A								
φ_B	54° 30′	55° 20′	56° 20′	57° 10′	58° 00′	58° 50′	59° 30′	60° 20′

γ) Die Abhängigkeit der Strebenkraft aus dem Wärmeunterschied

$$D = \frac{n \sec \varphi}{f_1(n) + f_2 \operatorname{tg}^3 \varphi \frac{F_1}{F_2} + f_3 \sec^3 \varphi \frac{F_1}{F_3}} 0{,}189\, F_1$$

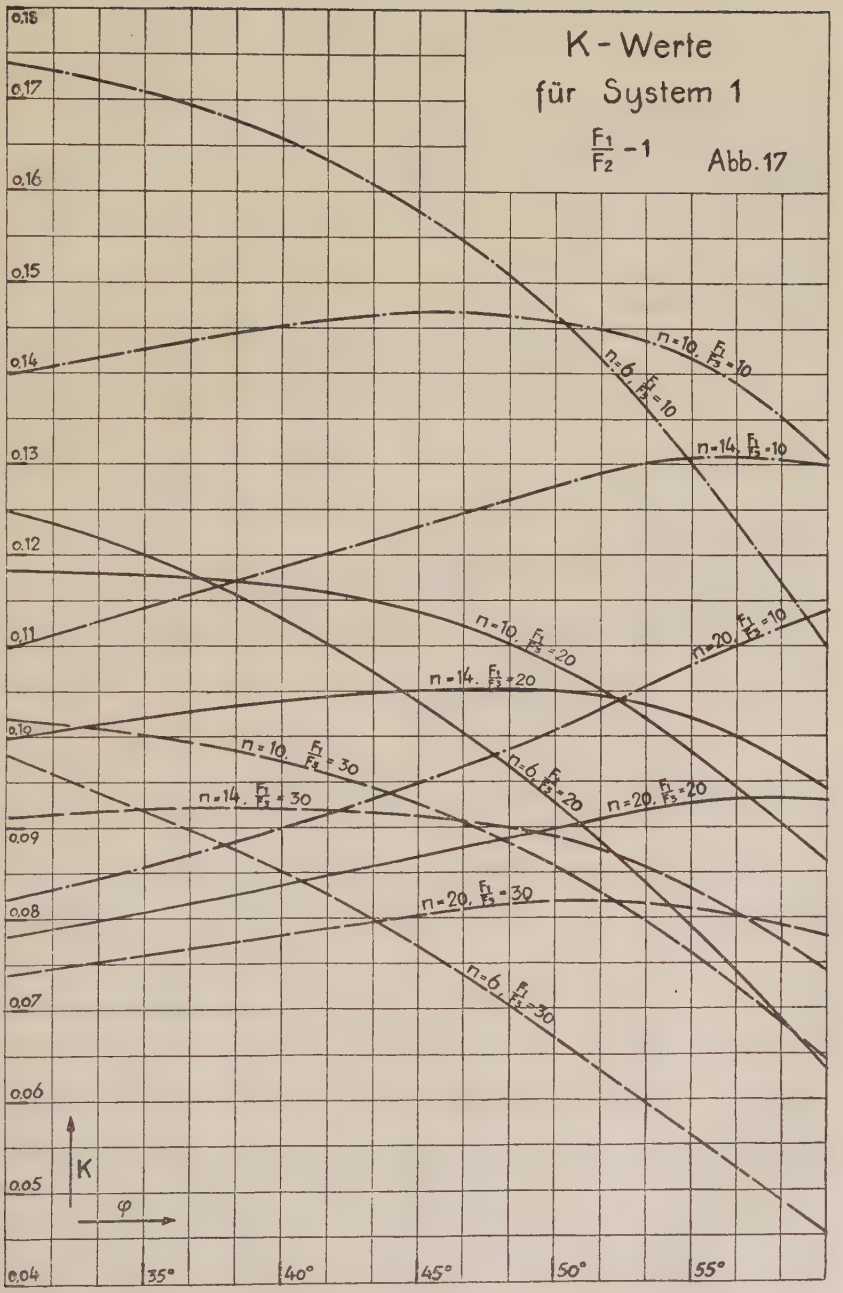
bzw. $$D = 0{,}189\, K F_1$$

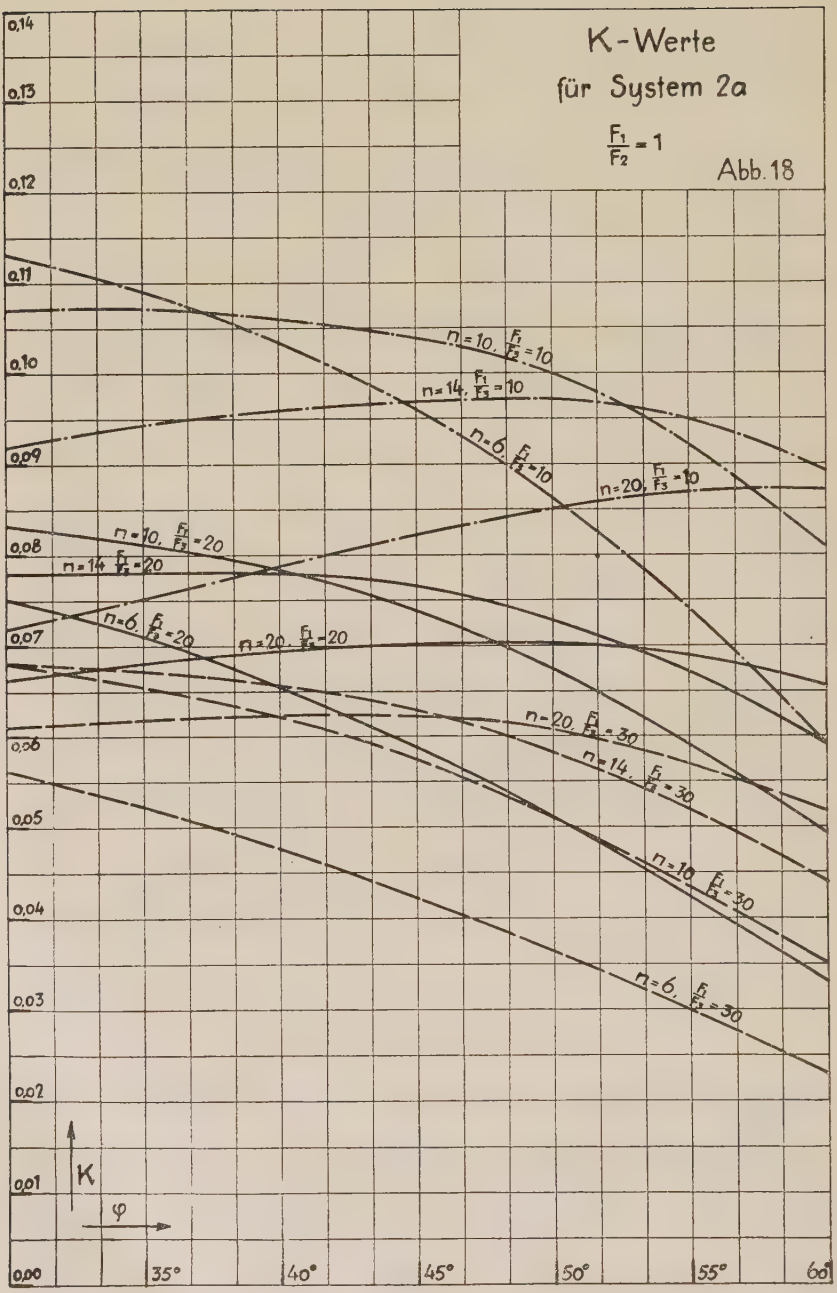
von den Größen φ, n, $\frac{F_1}{F_3}$ ist in den Abb. 17 und 18 für das System 1 und 2a dargestellt. Hierbei ist der praktisch vernachlässigbare Pfostenbeiwert

$$f_2 \cdot \operatorname{tg}^3 \varphi \frac{F_1}{F_2} \text{ stets mit } \frac{F_1}{F_2} = 1$$

berücksichtigt.

Während die Strebenkräfte der einzelnen Systeme der Gruppe A bis auf das praktisch zu vernachlässigende Pfostenglied $f_2 \operatorname{tg}^3 \varphi \frac{F_1}{F_2}$ einander gleich sind, ergeben sich für die Systeme der Gruppe B recht erhebliche Unterschiede.


K - Werte
für System 1
$\frac{F_1}{F_2} - 1$
Abb. 17
0.18
0.17
0.16
0.15
0.14
0.13
0.12
0.11
0.10
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
K
φ
35°
40°
45°
50°
55°
n=10, $\frac{F_1}{F_2}$=10
n=6, $\frac{F_1}{F_2}$=10
n=14, $\frac{F_1}{F_2}$=10
n=20, $\frac{F_1}{F_2}$=10
n=10, $\frac{F_1}{F_2}$=20
n=14, $\frac{F_1}{F_2}$=20
n=20, $\frac{F_1}{F_2}$=20
n=6, $\frac{F_1}{F_2}$=20
n=10, $\frac{F_1}{F_2}$=30
n=14, $\frac{F_1}{F_2}$=30
n=20, $\frac{F_1}{F_2}$=30
n=6, $\frac{F_1}{F_2}$=30


K-Werte
für System 2a
$\frac{F_1}{F_2} = 1$
Abb. 18
0,14
0,13
0,12
0,11
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0,00
K
φ
35°
40°
45°
50°
55°
60°
n=10, $\frac{F_1}{F_2}$=10
n=14, $\frac{F_1}{F_2}$=10
n=6, $\frac{F_1}{F_2}$=10
n=20, $\frac{F_1}{F_2}$=10
n=10, $\frac{F_1}{F_2}$=20
n=14 $\frac{F_1}{F_2}$=20
n=6, $\frac{F_1}{F_2}$=20
n=20, $\frac{F_1}{F_2}$=20
n=20, $\frac{F_1}{F_2}$=30
n=14, $\frac{F_1}{F_2}$=30
n=10, $\frac{F_1}{F_2}$=30
n=6, $\frac{F_1}{F_2}$=30

In den Abb. 19 bis 22 sind die K-Werte für die Systeme der Gruppe B für $K_{2a} = 100$ dargestellt.

Wie diese Abb. 19 bis 22 zeigen, sind die Stabkräfte in jedem Fall bei dem System 2a am kleinsten. Der vom festen zum beweglichen Lager sich öffnende K-Verband erhält bei sonst gleichen Stabkräften aus Winddruck die kleinsten Stabkräfte aus dem Wärmeunterschied. Der Verband hat allerdings im Grundriß unsymmetrischen Aufbau zur Brückenquerachse.

Bei der entgegengesetzten Strebenrichtung (System 2b), also bei Öffnung des K-Verbandes zum festen Lager, sind die Stabkräfte aus dem Wärmeunterschied je nach den Verhältnissen um rund 4 % bis 22 % größer als bei System 2a. Dieses System ist also unter allen Umständen zu vermeiden, da es gegenüber System 2a keinerlei Vorteile bietet.

System 3, der sich zur Mitte öffnende „statisch bestimmte" K-Verband, ist nach System 2a das zweitgünstigste System. Seine Stabkräfte aus dem Wärmeunterschied sind 1 % bis 5 % größer als bei System 2a.

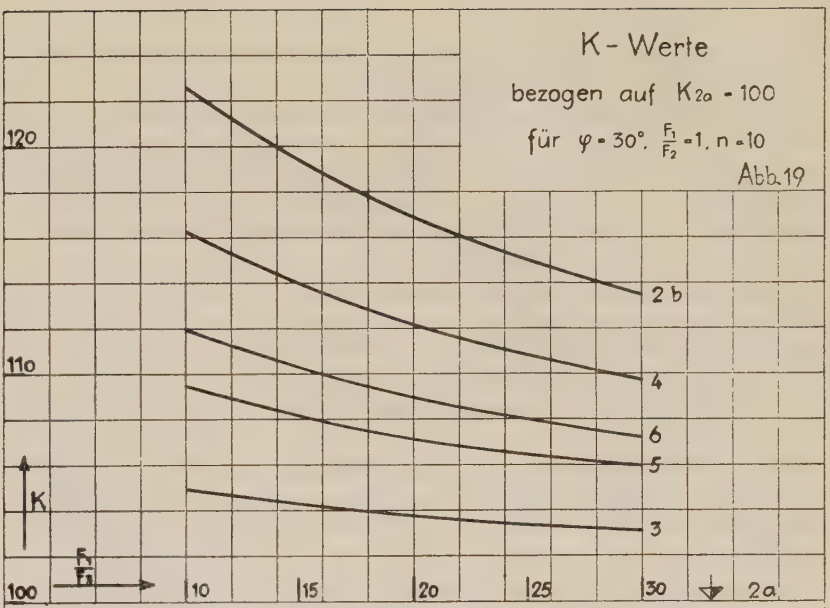
Die Stabkräfte aus dem Wärmeunterschied der übrigen Systeme 4 bis 6 liegen zwischen denen der Systeme 2b und 3. Ihre Stabkräfte sind stets größer als die des Systems 2a, und zwar für

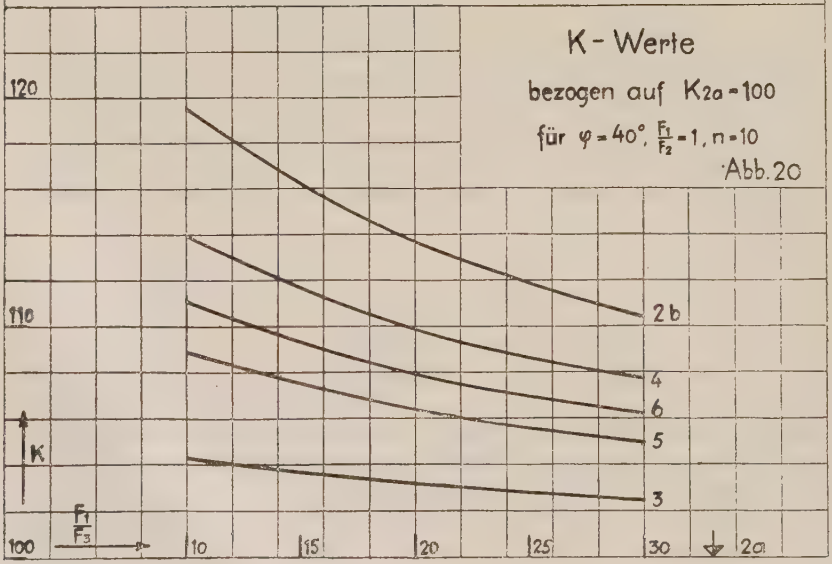
System 4 um 3 % bis 16 %,
„ 5 „ 3 % „ 9 %,
„ 6 „ 4 % „ 12 %.

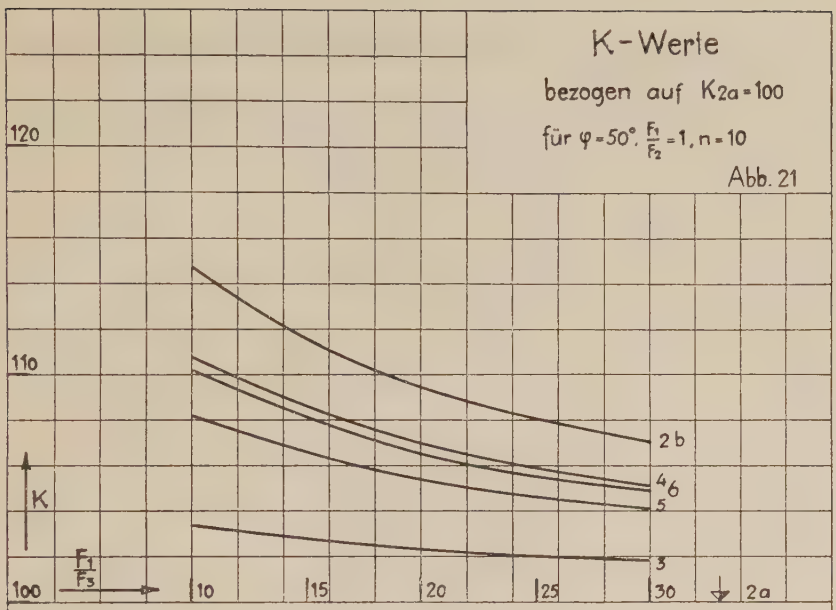
In ihrer Unempfindlichkeit gegen Wärmeunterschiede der Hauptträger ist die Reihenfolge im allgemeinen 2a, 3, 5, 6, 4, 2b. Für kleine Felderzahlen n und große Neigungswinkel φ kann sich die Reihenfolge jedoch so ändern, daß die Systeme 5 und 6 prozentual größere Strebenkräfte bekommen als die Systeme 4 und 2b (etwa bis $n = 10$ und von $\varphi = 55^0$ ab).

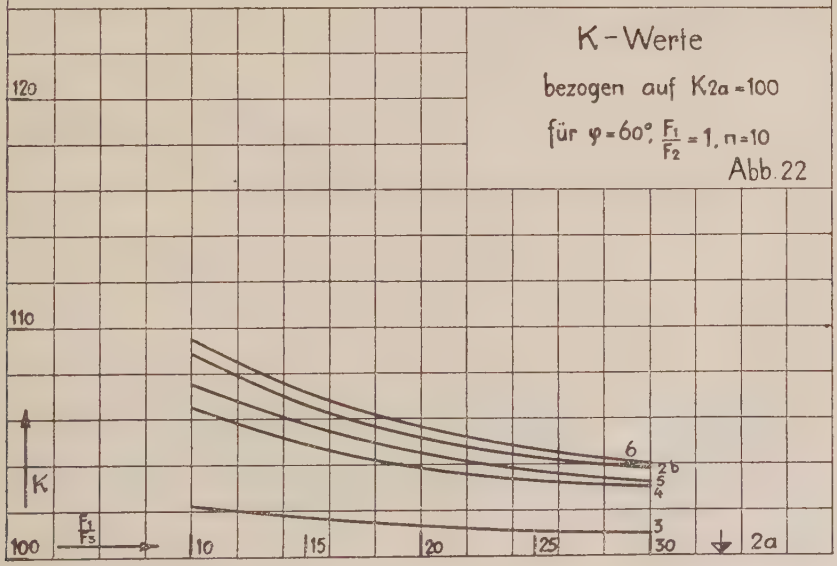
δ) Vergleich der Systemgruppe A mit Systemgruppe B.

Für den Vergleich von Systemgruppe A mit Systemgruppe B wird ein Verhältnis von $\frac{b}{a} = 1{,}41$ gewählt, bei dem rein geometrisch beide Verbände möglich sind, da die Neigungswinkel φ_A mit rd. 55^0 und φ_B mit rd. 35^0 gleich weit von dem konstruktiv günstigsten Neigungswinkel von 45^0 entfernt sind.


K - Werte
bezogen auf $K_{2a} = 100$
für $\varphi = 30°$, $\frac{F_1}{F_2} = 1$, $n = 10$
Abb. 19
120
110
100
K
$\frac{F_1}{F_3}$
10
15
20
25
30
2a
2b
4
6
5
3


K - Werte
bezogen auf $K_{2a} = 100$
für $\varphi = 40°$, $\frac{F_1}{F_2} = 1$, $n = 10$
Abb. 20
120
110
100
K
$\frac{F_1}{F_3}$
10
15
20
25
30
2a
2b
4
6
5
3


K-Werte
bezogen auf K2a=100
für φ=50°, F1/F2=1, n=10
Abb. 21
120
110
100
K
F1/F3
10
15
20
25
30
2a
2b
4
6
5
3


K-Werte
bezogen auf K2a=100
für φ=60°, F1/F2=1, n=10
Abb. 22
120
110
100
K
F1/F3
10
15
20
25
30
2a
6
2b
5
4
3

Für Druckstäbe mit einem Schlankheitsgrad größer als 100 gilt mit den Bezeichnungen:

s_k = Knicklänge, I = Trägheitsmoment,
F = Querschnitt, ν = Knicksicherheit,
σ = auftretende Spannung,
σ_{zul} = zulässige Spannung,
$\sigma_{D\,zul}$ = zulässige Druckspannung,
σ_k = Euler-Knickspannung und
P = Druckkraft,

$$\sigma = \frac{\omega P}{F}; \qquad \sigma_k = \frac{\pi^2 E I}{s_k^2 F}$$

$$\sigma_{D\,zul} = \frac{\sigma_k}{\nu} = \frac{\pi^2 E I}{\nu s_k^2 F}$$

$$\omega = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{D\,zul}} = \frac{\sigma_{zul}\,\nu s_k^2 F}{\pi^2 E I},$$

so daß

$$\sigma = \frac{\sigma_{zul}\,\nu s_k^2 P}{\pi^2 E I} \leqq \sigma_{zul}$$

wird.

Mit s_k gleich Strebenlänge wird beim Vergleich der beiden Systemgruppen:

$$\frac{d_A{}^2 P_A}{I_A} = \frac{d_B{}^2 P_B}{I_B}$$

und mit dem für gleichartige Profile nahezu konstanten Profilbeiwert $k = \frac{F^2}{I}$ wird

$$\frac{d_A{}^2 P_A}{F_A{}^2} = \frac{d_B{}^2 P_B}{F_B{}^2} \quad \text{oder}$$

(40)
$$\frac{F_A{}^2}{F_B{}^2} = \frac{d_A{}^2}{d_B{}^2}\,\frac{P_A}{P_B}$$

Systemgruppe A für $\frac{b}{a} = 1{,}41$

$$d_A = \sqrt{b^2 + a^2} = a\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1} = a\sqrt{1{,}41^2 + 1} = 1{,}73\,a$$

$$P_A = \frac{Q}{\sin \varphi_A} = \frac{Q\,d_A}{b} = 1{,}73\,Q\,\frac{a}{b} = 1{,}23\,Q$$

Systemgruppe B

$$d_B = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{1}{2} a \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 4} = \frac{1}{2} a \sqrt{1{,}41^2 + 4} = 1{,}23\,a$$

$$P_B = \frac{Q}{2 \sin \varphi_B} = \frac{Q\, 2\, d_B}{2\, b} = 1{,}23\, Q \frac{a}{b} = 0{,}87\, Q$$

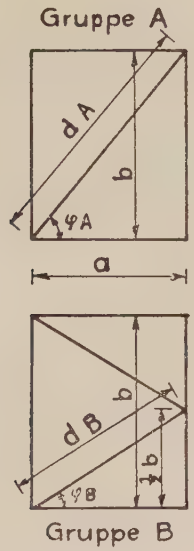


Abb. 23a.

Abb. 23b.

Danach ist nach Formel 40

$$\frac{F_A^2}{F_B^2} = \frac{1{,}73^2}{1{,}23^2} \frac{1{,}23}{0{,}87} = 2{,}83\,; \quad \frac{F_A}{F_B} = 1{,}68$$

Der Vergleich wird unter den Voraussetzungen

$$\varphi_A = 55^0 \quad \varphi_B = 35^0, \text{ wobei } \frac{b}{a} = \text{rd. } 1{,}41$$

$$\frac{F_1}{F_3}\, A = 15 \quad \frac{F_1}{F_3}\, B = 25, \quad \text{wobei } \frac{F_A}{F_B} = \frac{F_1}{15} \frac{25}{F_1} = \text{rd. } 1{,}68$$

geführt. Als Vertreter der Systemgruppe B ist das System 2a mit mit den kleinsten Stabkräften gewählt.

Man erhält für:

Tafel V.

n	6	8	10	12	14	16	18	20
K_A	0,098	0,111	0,117	0,117	0,114	0,110	0,105	0,100
K_B	0,060	0,068	0,072	0,073	0,072	0,070	0,067	0,065

Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß für Querkraft aus Winddruck

$$P_A = 1{,}23\,Q \text{ und } P_B = 0{,}87\,Q$$

ist, daher müssen die $\frac{1}{1{,}23}$fachen K_A-Werte mit den $\frac{1}{0{,}87}$fachen K_B-Werten verglichen werden. Die zusätzlichen Strebenkräfte bei der Systemgruppe A werden somit um p Prozent größer als bei der Systemgruppe B.

Tafel VI.

n	6	8	10	12	14	16	18	20
$\frac{1}{1{,}23} K_A$	0,080	0,090	0,095	0,095	0,093	0,089	0,085	0,081
$\frac{1}{0{,}87} K_B$	0,069	0,078	0,083	0,084	0,083	0,080	0,077	0,074
p %	16	16	15	13	12	11	10	9

Die Systemgruppe A ist also erheblich empfindlicher gegen Wärmeunterschiede als Systeme der Gruppe B. Es sollte daher, so bald es der Neigungswinkel gestattet, — also etwa von $\frac{b}{a} = 1{,}2$ ab — besonders bei kleinen Felderzahlen ein System der Gruppe B ausgeführt werden.

Den Zusammenhang zwischen der Systemgruppe A und den anderen Systemen der Gruppe B stellen dabei die Kurven nach Abbildungen 19 bis 22 her. Auch benötigt in diesem Falle (bei gleichartiger Profilwahl) ein System der Gruppe A 19 % mehr Gewicht als ein System der Gruppe B, da für die theoretischen Gewichte sich ergibt: γ = spez. Gewicht.

$$G_A = \sum_1^n F_A d_A \gamma = 1{,}68 \cdot 1{,}73\, a\gamma \sum_1^n F_B = 2{,}91\, a\gamma \sum_1^n F_B$$

$$G_B = 2 \sum_1^n F_B d_B \gamma = \quad 2 \cdot 1{,}22\, a\gamma \quad \sum_1^n F_B = 2{,}44\, a\gamma \sum_1^n F_B$$

$$G_A = 1{,}19\, G_B$$

ε) Vergleich zwischen System 1 und System 5.

Bei größeren Feldweiten ist statt des Systems 1 auch rein geometrisch System 5 oder 6 möglich, wobei bei letzteren die Knicklänge und die Stabkraft halbiert wird. Allerdings erfordern diese Systeme auch die doppelte Werkstattarbeit, da sie die doppelte Strebenzahl haben.

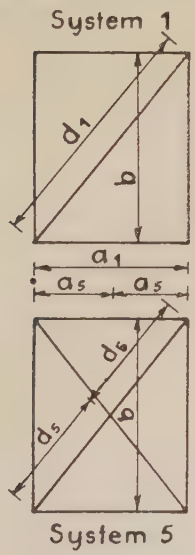


Abb. 24a, b.

Unter Berücksichtigung der Bezeichnungen des Systems 5 auf Seite 24 ff ist.

$$n_1 = \frac{1}{2} n_5$$

$$d_1 = 2\ d_5$$

$$a_1 = 2\ a_5$$

$$P_1 = 2\ P_5$$

Damit wird nach Formel 40:

$$\frac{F_1^{\,2}}{F_5^{\,2}} = 2^2 \cdot 2 = 8 \text{ und } \frac{F_1}{F_2} = \sqrt{8} = 2{,}83$$

Der Vergleich wird unter den Voraussetzungen:

$$n_1 = 10 \quad n_5 = 20, \text{ wobei } \frac{n_1}{n_5} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{F_1}{F_3^{\,1}} = 10 \quad \frac{F_1}{F_3^{\,5}} = 30, \text{ wobei } \frac{F_1}{F_5} = \text{rd. } 2{,}83$$

geführt. Man erhält für:

Tafel VII.

φ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
K_1	0,140	0,143	0,145	0,147	0,146	0,142	0,131
K_5	0,064	0,065	0,065	0,064	0,063	0,059	0,053

Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß für Querkraft aus Winddruck $P_1 = 2\,P_5$ ist, so daß die $\frac{1}{2}K_1$-Werte mit den K_5-Werten zu vergleichen sind. Hierbei stellt sich heraus, daß die zusätzlichen Strebenkräfte im System 1 um p Prozent größer als im System 5 sind.

Tafel VIII.

φ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
$\frac{1}{2}K_1$	0,070	0,072	0,073	0,073	0,073	0,071	0,065
K_5	0,064	0,065	0,065	0,064	0,063	0,059	0,059
p%	9	10	12	14	16	20	23

Im Gewicht ist System 1 bei gleichartiger Profilausbildung um 41 % schwerer als das System 5, da:

$$G_1 = \sum_1^n F_1 d_1 \gamma = 2{,}83 \sum_1^n F_5 d_1 \gamma$$

$$G_5 = 2 \sum_1^n F_5 d_1 \gamma$$

$$G_1 = 1{,}41\, G_5$$

ζ) Zusammenfassung.

Während die Systemgruppe A in werks-technischer Hinsicht manche Vorteile bietet, da sie nur wenige Stäbe besitzt, also auch wenig Werkstattarbeit verursacht, bietet sie im Gewicht keine Vorteile vor Systemen der Gruppe B; hierbei wird vorausgesetzt, daß bei sämtlichen in Frage kommenden Systemen dieselbe Querschnittsausbildung angewandt werden würde, und daß die geringen Gewichtsunterschiede in den Minuslängen und Knotenblechen zu vernachlässigen sind. Hinsichtlich ihrer Empfindlichkeit für ungleiche Erwärmung der Hauptträger wird die Systemgruppe A nur von dem — immer vermeidbaren — Verband System 2b erreicht. Bei kleinen Stützweiten kann allerdings die Systemgruppe A dadurch wirtschaftlicher werden, daß die Stäbe der Gruppe B nicht mehr ausgenutzt werden können, sondern aus konstruktiven Gründen ein stärkeres Profil erhalten müssen.

Bei den Systemen der Gruppe B sind die Gewichte und die Werkstattarbeit stets annähernd gleich. Es empfiehlt sich daher, die Wahl des Verbandes nach dem Grad der Empfindlichkeit für ungleiche Erwärmung der Hauptträger vorzunehmen.

Am günstigsten wäre dabei das System 2a, das jedoch in den meisten Fällen aus architektonischen Gesichtspunkten nicht erwünscht sein wird, da es keinen symmetrischen Aufbau hat.

Deshalb ist dann das zweitbeste System 3, der „statisch bestimmte" K-Verband, zu wählen.

Hinter diesen ist die Reihenfolge: System 5, der Rhombenverband, und schließlich System 6, der Kreuzverband.

Der sich zum festen Lager öffnende K-Verband (System 2b) und der „statisch unbestimmte" K-Verband (System 4) bieten gegenüber den obigen Systemen keinerlei Vorteile und sollten daher stets vermieden werden.

C. Beispiele.

Die Größenordnung der durch ungleiche Erwärmung der Hauptträger auftretenden Strebenkräfte wird an folgenden Beispielen gezeigt. Und zwar sind eine vollwandige Straßen- und eine Eisenbahnbrücke mit obenliegender Fahrbahn (Deckbrücken) gewählt. Es ist der Einfachheit halber geschweißte Ausführung angenommen. Als Windverbandssystem ist das System 2a gewählt, das die kleinsten Stabkräfte liefert. Ihm sind die Stabkräfte der anderen Systeme gegenübergestellt.

1. Beispiel.

Dreispurige Straßenbrücke, Lastenklasse I.

Stützweite 30,00 m, Hauptträgerabstand 7,00 m.

Schwere Eisenbetonfahrbahnplatte mit großen Konsolen direkt auf Haupt- und Querträgerobergurten kreuzbewehrt lagernd.

Querträgerabstand 5,00 m, Material St. 37.

Belastung:

Ständige Last:	Fahrbahntafel	rd. 1,000 t/m²
	Stahlkonstruktion	rd. 0,210 t/m²
		$g = 1{,}210$ t/m²

Verkehrslasten nach DIN 1073 (Reichsautobahn).

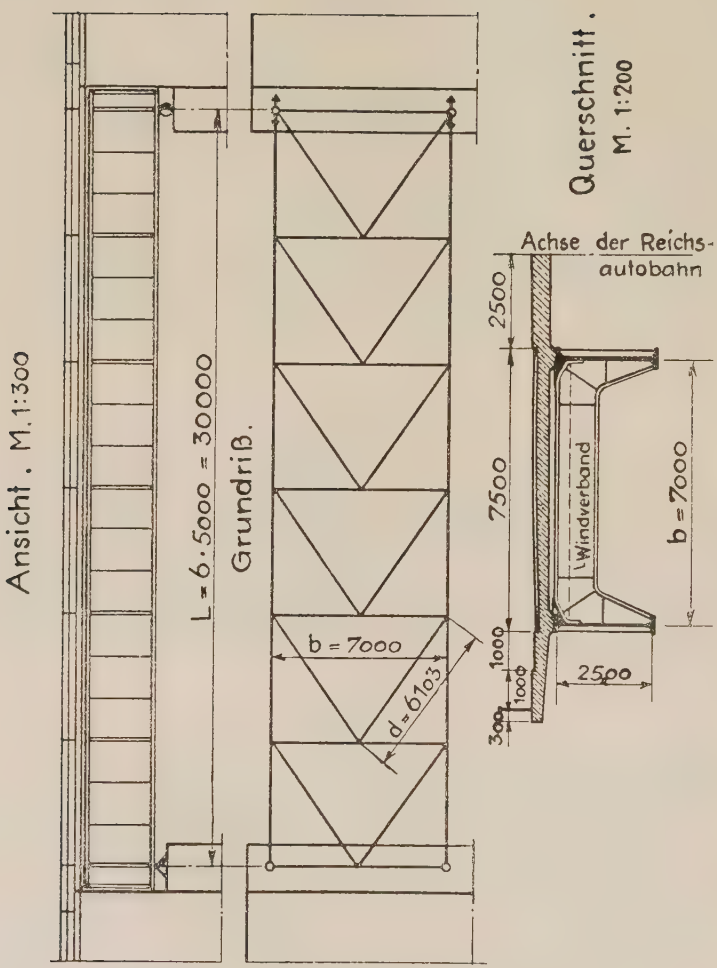


Abb. 25 (Beispiel 1).

Querträger:

Stützweite $= 7{,}00$ m

Querträgerabstand $= 5{,}00$ m

Stoßzahl φ $= 1{,}39$

Die Querträger werden ohne Berücksichtigung der entlastenden Konsolen und der Lastverteilung durch die kreuzweise Bewehrung berechnet.

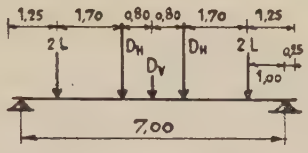


Abb. 25a.

Ständige Last: von der Fahrbahn $5 \cdot 1{,}00 = 5{,}00$ t/m

Eigengewicht rd. $0{,}30$ t/m

$g = 5{,}30$ t/m

$$\max M_g = \frac{5{,}30 \cdot 7{,}0^2}{8} = 32{,}5 \text{ tm}$$

Maximalmoment aus Verkehrslast

Auflagerdruck

des Lastkraftwagens $L = 4{,}0 + 2{,}0\,\frac{2{,}0}{5{,}0} = 4{,}8$ t

der Dampfwalze

Vorderachse $D_v = 10{,}0\,\frac{2{,}0}{5{,}0} = 4{,}0$ t

Hinterrad $D_h =$ $7{,}0$ t

des Menschengedränges

$$p = 0{,}50\,\frac{0{,}50^2 + 3{,}50^2}{2 \cdot 5{,}0} = 0{,}625 \text{ t/m}$$

$$\max M_{\varphi p} = 1{,}39\left[\frac{0{,}625 \cdot 7{,}0^2}{8} + 2 \cdot 4{,}8 \cdot 1{,}0 + 7{,}0 \cdot 2{,}70 + 4\,\frac{7{,}0}{4}\right] = 54{,}7 \text{ tm}$$

$$\max M_{g+\varphi p} = 32{,}5 + 54{,}7 = 87{,}2 \text{ tm}$$

Aus konstruktiven Gründen:

$$I = \frac{1,0}{12}\,100,0^3 + 2\cdot 30,0\cdot 2,0\cdot 51,0^2 = 83\,300 + 312\,000$$
$$= 395\,300\ \text{cm}^4$$

$$W = \frac{395\,300}{52,0} = 7600\ \text{cm}^3 \qquad \sigma = \frac{8720}{7600} = 1,15\ \text{t/cm}^2$$

Abb. 25b.

$$F_2 = 100,0\cdot 1,0 + 2\cdot 30,0\cdot 2,0 = 100 + 120 = 220\ \text{cm}^2$$

Hauptträger:

Stützweite $L = 30,0$ m

Belastungsbreite $= \frac{12,30}{2} = 6,15$ m

Stoßzahl für $1,5\,L$ $\qquad \varphi = 1,33$

Ständige Last:

von der Fahrbahnplatte	$6,15\cdot 1,00 = 6,15$ t/m
Stahlkonstruktion	$6,15\cdot 0,21 = 1,30$ t/m
	$g = 7,45$ t/m

Verkehrslast:

Menschengedränge $\varphi p = \frac{7,50}{2}\,0,50\cdot 1,33 = 2,50$ t/m

Die Regelfahrzeuge werden als reduzierte Einzellast berücksichtigt.

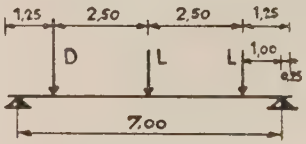


Abb. 25c.

$$D = 24,0 - 6,0\cdot 2,5\cdot 0,5 = 16,5\ \text{t}$$
$$L = 12,0 - 6,0\cdot 2,5\cdot 0,5 = 4,5\ \text{t}$$
$$\varphi P = \frac{1,33}{7,00}\,(16,5\cdot 6,00 + 2\cdot 4,5\cdot 2,25) = 22,7\ \text{t}$$

$$\max M_g = \frac{7,45\cdot 30,00^2}{8} = 838\ \text{tm}$$

$$\max M_{\varphi p} = \frac{2,50\cdot 30,00^2}{8} + \frac{22,7\cdot 30,00}{4}$$
$$= 281 + 170 = 451\ \text{tm}$$

$$\max M_{g+\varphi p} = 838 + 451 = 1289 \text{ tm}$$

$$I = \frac{1{,}8}{12} 250{,}0^3 + 2 \cdot 50{,}0 \cdot 6{,}0 \cdot 128{,}0^2$$

$$= 2343000 + 9830000 = 12173000 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{12173000}{131{,}0} = 92900 \text{ cm}^3, \quad \sigma = \frac{128900}{92900} = 1{,}4 \text{ t/cm}^2$$

$$F = 250 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot 50{,}0 \cdot 6{,}0 = 450 + 600 = 1050 \text{ cm}^2$$

Abgesetzter Querschnitt:

$$I = 2343000 + 2 \cdot 50{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot 127{,}0^2$$

$$= 2343000 + 6452000 = 8795000 \text{ cm}^4$$

$$M_{zul} = \frac{8795000 \cdot 1{,}40}{129{,}0} = 955 \text{ tm}$$

$$\alpha = \frac{955}{1289} = 0{,}74, \quad \zeta \text{ nach B.E. Tafel 8 } \xi = 0{,}2156$$

$$x = 0{,}2156 \cdot 30{,}00, \quad \text{rd.} = 6{,}00 \text{ m (Voranschluß)}$$

$$F = 450 + 2 \cdot 50{,}0 \cdot 4{,}0 = 450 + 400 = 850 \text{ cm}^2$$

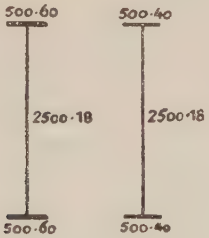


Abb. 25 d, e.

Ersatzquerschnitt:

$$F_{m1} = 850 \text{ cm}^2$$

$$F_{m2} = \frac{5{,}00}{\frac{1{,}00}{850} + \frac{4{,}00}{1050}} = \frac{5{,}00}{0{,}00118 + 0{,}00381} = 1000 \text{ cm}^2$$

$$F_{m3} = 1050 \text{ cm}^2$$

$$F_1 = \frac{2 \cdot 216 + 3 \cdot 36 + 6}{6\left[\frac{1+36}{850} + \frac{4+25}{1000} + \frac{9+16}{1050}\right]}$$

$$F_1 = \frac{546}{6\,(0{,}0435 + 0{,}0290 + 0{,}0238)} = 945 \text{ cm}^2$$

Windverband:

Windflächen:

unbelastete Brücke $F_u = 2{,}50 + 0{,}50 = 3{,}00$ m²/m

belastete Brücke $F_{bg} = 2{,}50 + 0{,}50 = 3{,}00$ m²/m

Verkehrsband $F_{bp} = 2{,}00$ m²/m

Windbelastung:

$$w_u = 3{,}00 \cdot 0{,}25 = 0{,}750 \text{ t/m}$$
$$w_{bg} = 3{,}00 \cdot 0{,}15 = 0{,}450 \text{ t/m}$$
$$w_{bp} = 2{,}00 \cdot 0{,}15 = 0{,}300 \text{ t/m}$$
$$w_{bg} = 0{,}750 \text{ t/m}$$

Strebenlänge:

$$d = \sqrt{3{,}50^2 + 5{,}00^2} = 6{,}10 \text{ m} = s_k$$

Stabkräfte aus Winddruck:

$$D_1 = \pm \frac{6{,}10 \cdot 30{,}00}{7{,}00 \cdot 2} \frac{6}{5} \frac{1}{36} 0{,}750 \cdot 5^2 = \pm 0{,}436 \cdot 0{,}75 \cdot 5^2 = \pm 8{,}16 \text{ t}$$

$$D_2 = \pm 0{,}436\,(0{,}750 \cdot 4^2 - 0{,}450 \cdot 1^2) = \pm 5{,}03 \text{ t}$$

$$D_3 = \pm 0{,}436\,(0{,}750 \cdot 3^2 - 0{,}450 \cdot 2^2) = \pm 2{,}16 \text{ t}$$

Bemessung: Die Streben werden ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes auf reinen Druck bemessen.

$D_1 = -8{,}16$ t ⌐L 110·110·10 $F = 42{,}4$ cm²

$i_\xi = 4{,}23$ cm $\lambda = \frac{610}{4{,}23} = 145$ $\omega = 4{,}97$

$$\sigma = \frac{4{,}97 \cdot 8{,}16}{42{,}4} = 0{,}96 \text{ t/cm}^2 < 1{,}20 = \sigma_{zul} \qquad D_{1\,zul} = 10{,}24 \text{ t}$$

$D_2 = -5{,}03$ t ⌐L 90·90·9 $F = 31{,}0$ cm²

$i_\xi = 3{,}45$ cm $\lambda = \frac{610}{3{,}45} = 177$ $\omega = 7{,}41$

$$\sigma = \frac{7{,}41 \cdot 5{,}03}{31{,}0} = 1{,}20 \text{ t/cm}^2 = \sigma_{zul} \qquad D_{2\,zul} = 5{,}02 \text{ t}$$

$D_3 = -2{,}16$ t $\quad \lrcorner\!\llcorner 70 \cdot 70 \cdot 9 \quad F = 23{,}8$ cm²

$i_\xi = 2{,}64$ cm $\quad \lambda = \frac{610}{2{,}64} = 231 \quad \omega = 12{,}62$

$$\sigma = \frac{12{,}62 \cdot 2{,}16}{23{,}8} = 1{,}15 \text{ t/cm}^2 < \sigma_{zul} \qquad D_{3zul} = 2{,}26 \text{ t}$$

$$F_3 = \frac{3}{\frac{1}{42{,}4} + \frac{1}{31{,}0} + \frac{1}{23{,}8}} = \frac{3}{0{,}0236 + 0{,}0323 + 0{,}0420}$$

$F_3 = 30{,}7$ cm²

Für den Verband System 2 a erhält man nach Formel 35 (s. S. 40) mit:

$n = 6 \qquad F_1 = 945$ cm²

$$\sec\varphi = \frac{610}{5{,}00} = 1{,}220 \quad \sec^3\varphi = 1{,}816$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3{,}50}{5{,}00} = 0{,}700 \quad \operatorname{tg}^3\varphi = 0{,}343$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{945}{220} = 4{,}30 \qquad \frac{F_1}{F_3} = \frac{945}{30{,}7} = 30{,}8$$

$$D_t = \frac{6 \cdot 1{,}220 \cdot 0{,}189 \cdot 945}{\frac{2 \cdot 36 + 3 \cdot 6 + 1}{3} + 2 \cdot 0{,}343 \cdot 4{,}30 + 2 \cdot 1{,}816 \cdot 30{,}8}$$

$$D_t = \frac{7{,}32}{30{,}33 + 2{,}95 + 111{,}87} 0{,}189 \cdot 945 = 9{,}01 \text{ t}$$

Für die anderen Systeme würde sich ergeben:

System 2 b $D_t = 9{,}82$ t $= 1{,}09 \cdot 9{,}01$
System 3 $D_t = 9{,}20$ t $= 1{,}02 \cdot 9{,}01$
System 4 $D_t = 9{,}67$ t $= 1{,}07 \cdot 9{,}01$
System 5 $D_t = 9{,}46$ t $= 1{,}05 \cdot 9{,}01$
System 6 $D_t = 9{,}67$ t $= 1{,}07 \cdot 9{,}01$

Bei einer Strebenkraft von 9,01 t würde also nur die Strebe D_1 den Vorschriften genügen, während für:

D_2 schon bei einem Wärmeunterschied von $8{,}3^0$,
D_3 schon bei einem Wärmeunterschied von $3{,}8^0$

die zulässige Stabkraft erreicht wäre.

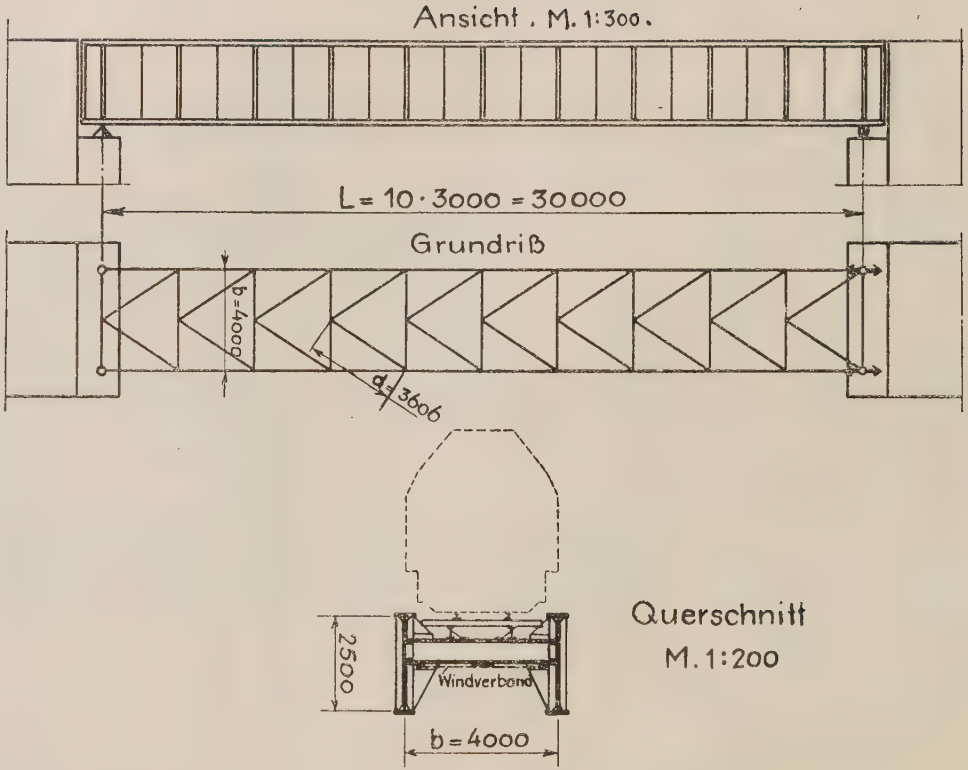


Abb. 26 (Beispiel 2).

Für den Stab D_3 beträgt die Knickkraft für mittigen Druck

$$D_k = \frac{\pi^2 EF}{\lambda^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 2100 \cdot 23{,}8}{231^2} = 9{,}25 \text{ t}$$

Die Stabkraft D_t erreicht also fast die Knickkraft dieses Stabes für mittigen Druck.

2. Beispiel.

Eingleisige Eisenbahnbrücke, Lastenzug *N*.
Stützweite 30,00 m, Hauptträgerabstand 4,00 m.
Holzschwellen mit Bohlen- und Riffelblechbelag.
Querträgerabstand 3,00 m, Material St. 37.

Belastung:

Ständige Last:

Schienen, Schwellen, Bohlenbelag, Riffelblech	= rd. 0,200 t/m²
Stahlkonstruktion	= rd. 0,700 t/m²
$g =$	0,900 t/m²

Verkehrslast: Lastenzug *N* der B. E.

Querträger:

Stützweite	= 4,00 m	
Querträgerabstand	= 3,00 m	
Stoßzahl	$\varphi = 1{,}49$	
Belastung: Fahrbahn	= 3,00·0,200	= 0,600 t/m
Eigengewicht		= 0,200 t/m
g		= 0,800 t/m

Auflagerdrücke der Längsträger:

$$G = 0{,}800 \cdot 2{,}00 = 1{,}6 \text{ t}$$

$$P = 24{,}17 \text{ t (B. E. Tafel 15)}$$

$$\max M_{g+\varphi p} = (1{,}6 + 1{,}49 \cdot 24{,}17)\, 1{,}125 = 42{,}3 \text{ tm}$$

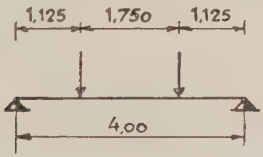


Abb. 26 a.

Gewählt: *I* 55 mit $W_x = 3610 \text{ cm}^3$

$$\sigma = \frac{4230}{3610} = 1{,}17 \text{ t/cm}^2$$

$$F_2 = 213 \text{ cm}^2$$

Hauptträger:

Stützweite $L = 30{,}00$ m
Hauptträgerabstand $b = 4{,}00$ m
Stoßzahl $\varphi = 1{,}43$

Belastung:

Ständige Last $2{,}00 \cdot 0{,}90 = 1{,}80$ t/m

$$\max M_g = \frac{1{,}80 \cdot 30{,}00^2}{8} = 203 \text{ tm}$$

$$\max M_{\varphi p} = 1{,}43 \cdot \frac{1}{2} 1536 = 1098 \text{ tm} \quad \text{(B. E. Tafel 4)}$$

$$\max M_{g+\varphi p} = 203 + 1098 = 1301 \text{ tm}$$

Querschnitt siehe S. 61, Abb. 25 d/e.

$$W = 92\,900 \text{ cm}^3 \quad \sigma = 1{,}400 \text{ t/cm}^2$$

Ersatzquerschnitt:

$F_{m1} = F_{m2} = 850 \text{ cm}^2$

$F_{m3} = F_{m4} = F_{m5} = 1050 \text{ cm}^2$

$$F_1 = \frac{2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 10}{6\left[\frac{1+100}{850} + \frac{4+81}{850} + \frac{9+64}{1050} + \frac{16+49}{1050} + \frac{25+36}{1050}\right]}$$

$$F_1 = \frac{2310}{6\,(0{,}1190 + 0{,}1000 + 0{,}0695 + 0{,}0619 + 0{,}0581)}$$

$F_1 = 942 \text{ cm}^2$

Windverband:

$F_u = 2{,}50 \text{ m}^2$; $w_u = 2{,}50 \cdot 0{,}250 = 0{,}625$ t/m
$F_{bg} = 2{,}50 \text{ m}^2$; $w_{bg} = 2{,}50 \cdot 0{,}150 = 0{,}375$ t/m
$F_{bp} = 3{,}50 \text{ m}^2$; $w_{bp} = 3{,}50 \cdot 0{,}150 = 0{,}525$ t/m

$w_{bq} = 0{,}900$ t/m

Seitenstoß: 6,00 t

$$d = \sqrt{2{,}00^2 + 3{,}00^2} = 3{,}61 \text{ m} = s_k$$

$$D_1 = \pm \frac{3{,}61 \cdot 30{,}0}{4{,}00 \cdot 2} \cdot \frac{10}{9} \frac{1}{100} \cdot 0{,}900 \cdot 9^2 \pm \frac{3{,}61}{4{,}00} \cdot 6{,}00 \cdot 0{,}9$$

$$= \pm 10{,}95 \pm 4{,}87 = \pm 15{,}82 \text{ t}$$

$$D_2 = \pm 0{,}15\ (0{,}900 \cdot 8^2 - 0{,}375 \cdot 1^2) \pm 5{,}41 \cdot 0{,}8$$
$$= \pm 8{,}61 \pm 4{,}33 = \pm 12{,}94 \text{ t}$$
$$D_3 = \pm 0{,}15\ (0{,}900 \cdot 7^2 - 0{,}375 \cdot 2^2) \pm 5{,}41 \cdot 0{,}7$$
$$= \pm 6{,}40 \pm 3{,}79 = \pm 10{,}19 \text{ t}$$
$$D_4 = \pm 0{,}15\ (0{,}900 \cdot 6^2 - 0{,}375 \cdot 3^2) \pm 5{,}41 \cdot 0{,}6$$
$$= \pm 4{,}36 \pm 3{,}25 = \pm 7{,}61 \text{ t}$$
$$D_5 = \pm 0{,}15\ (0{,}900 \cdot 5^2 - 0{,}375 \cdot 4^2) \pm 5{,}41 \cdot 0{,}5$$
$$= \pm 2{,}48 \pm 2{,}70 = \pm 5{,}18 \text{ t}$$

Bemessung: Ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes

$D_1 = -15{,}82$ t; $\sqsupset\!\!\sqsubset$ 100·100·10; $F = 38{,}4$ cm²

$i_\xi = 3{,}82$ cm; $\lambda = \dfrac{361}{3{,}82} = 95$; $\omega = 2{,}09$;

$$\sigma = \frac{2{,}09 \cdot 15{,}82}{38{,}4} = 0{,}86 \text{ t/cm}^2 \quad D_{1\,\text{zul}} = 18{,}37 \text{ t}$$

$D_2 = -12{,}94$ t $\sqsupset\!\!\sqsubset$ 100·100·10 wie D_1 $D_{2\,\text{zul}} = 18{,}37$ t

$$\sigma = \frac{2{,}09 \cdot 12{,}92}{38{,}4} = 0{,}70 \text{ t/cm}^2$$

$D_3 = -10{,}19$ t $\sqsupset\!\!\sqsubset$ 90·90·9; $F = 31{,}0$ cm²

$i_\xi = 3{,}45$ cm; $\lambda = \dfrac{361}{3{,}45} = 105$; $\omega = 2{,}61$;

$$\sigma = \frac{2{,}61 \cdot 10{,}19}{31{,}0} = 0{,}86 \text{ t/cm}^2 \quad D_{3\,\text{zul}} = 11{,}87 \text{ t}$$

$D_4 = -7{,}61$ t; $\sqsupset\!\!\sqsubset$ 80·80·10; $F = 30{,}2$ cm²

$i_\xi = 3{,}03$ cm; $\lambda = \dfrac{361}{3{,}03} = 120$; $\omega = 3{,}40$;

$$\sigma = \frac{3{,}40 \cdot 7{,}61}{30{,}2} = 0{,}86 \text{ t/cm}^2 \quad D_{4\,\text{zul}} = 8{,}88 \text{ t}$$

$D_5 = -5{,}18$ t; $\sqsupset\!\!\sqsubset$ 70·70·9; $F = 23{,}8$ cm²

$i_\xi = 2{,}64$ cm; $\lambda = \dfrac{361}{2{,}64} = 137$; $\omega = 4{,}44$;

$$\sigma = \frac{4{,}44 \cdot 5{,}18}{23{,}8} = 0{,}97 \text{ t/cm}^2 \quad D_{5\,\text{zul}} = 5{,}36 \text{ t}$$

$$F_s = \frac{5}{\frac{2}{38{,}4} + \frac{1}{31{,}0} + \frac{1}{30{,}2} + \frac{1}{23{,}8}} =$$

$$= \frac{5}{0{,}0521 + 0{,}0323 + 0{,}0331 + 0{,}0420} = 31{,}4 \text{ cm}^2$$

Nach Formel 35 erhält man mit $n = 10$; $F_1 = 942$ cm²

$$\sec\varphi = \frac{3{,}61}{3{,}00} = 1{,}202; \quad \sec^3\varphi = 1{,}737$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2{,}00}{3{,}00} = 0{,}667; \quad \operatorname{tg}^3\varphi = 0{,}296$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{942}{213} = 4{,}42 \qquad \frac{F_1}{F_3} = \frac{942}{31{,}4} = 30{,}00$$

$$D_t = \frac{10 \cdot 1{,}202 \cdot 0{,}189 \cdot 942}{\frac{2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1}{3} + 2 \cdot 0{,}296 \cdot 4{,}42 + 2 \cdot 1{,}737 \cdot 30{,}00}$$

$$D_t = \frac{12{,}02}{77{,}00 + 2{,}57 + 104{,}22} 0{,}189 \cdot 942 = 11{,}64 \text{ t}$$

Für die anderen Systeme würde sich ergeben:

System 2*b* $D_t = 13{,}07 \text{ t} = 1{,}12 \cdot 11{,}64 \text{ t}$
3 $D_t = 11{,}97 \text{ t} = 1{,}03 \cdot 11{,}64 \text{ t}$
4 $D_t = 12{,}71 \text{ t} = 1{,}09 \cdot 11{,}64 \text{ t}$
5 $D_t = 12{,}39 \text{ t} = 1{,}06 \cdot 11{,}64 \text{ t}$
6 $D_t = 12{,}57 \text{ t} = 1{,}08 \cdot 11{,}64 \text{ t}$

Da nach Seite 67 entweder nur Winddruck und Seitenstoß oder nur Wärmeunterschied und Seitenstoß als gleichzeitige Belastung auftreten, ergeben sich für diesen letzten Belastungsfall folgende Stabkräfte:

$$D_1 = 11{,}64 + 4{,}87 = 16{,}59 \text{ t}$$
$$D_2 = 11{,}64 + 4{,}33 = 15{,}96 \text{ t}$$
$$D_3 = 11{,}64 + 3{,}79 = 15{,}43 \text{ t}$$
$$D_4 = 11{,}64 + 3{,}25 = 14{,}89 \text{ t}$$
$$D_5 = 11{,}64 + 2{,}70 = 14{,}34 \text{ t}$$

Für diese Belastung würden also nur die Streben D_1 und D_2 den Vorschriften genügen, während für

D_3 bei einem Wärmeunterschied von 10,4°
D_4 bei einem Wärmeunterschied von 7,2°
D_5 bei einem Wärmeunterschied von 3,4°

die zulässige Stabkraft erreicht wäre.

Für den Stab D_5 beträgt die Knickkraft für mittigen Druck

$$D_k = \frac{3{,}14^2 \cdot 2100 \cdot 23{,}8}{137^2} = 26{,}28 \text{ t},$$

so daß in diesem Fall noch eine 1,83fache Knicksicherheit für mittigen Druck besteht.

3. Beispiel.

Zum Schluß sei noch bei einem außergewöhnlich ungünstigen Beispiel einer ausgeführten Brücke auf die Größe der waagerechten Auflagerkraft X_b am festen Lager in Richtung der Brückenachse die Aufmerksamkeit gelenkt. Die Brücke ist eine Überführung einer Reichsstraße als Balken auf 6 Stützen mit den Öffnungen

$$L = 36{,}96 + 46{,}50 + 46{,}50 + 46{,}50 + 36{,}96 = 213{,}42 \text{ m}.$$

Die Innenstützen sind als Pendelsäulen mit Kugelkopf ausgebildet, so daß der Windverband ein Balken auf 2 Stützen ist. Er wird von den 8 mm starken Buckelblechen der Fahrbahn gebildet.

Die vier gleichbemessenen Hauptträger haben einen gegenseitigen Abstand von 5,16 m, so daß die Gesamtbreite der Brücke $3 \cdot 5{,}16 = 15{,}48$ m beträgt. (Abb. 25).

Die vier Hauptträger sind an den Widerlagern einzeln gelagert. Da sich die Endquerscheibe — gestützt durch den starren Windverband — nicht verbiegen kann, nehmen die vier Lager proportional zu ihrem Abstand das Einspannmoment auf.

Durch seitliche Ausbiegung der Brücke stellen sich die Pendelsäulen schief, und ihre Horizontalkomponente belastet den Windverband, so daß die Ausbiegung auch eine Funktion der vertikalen Last ist.

Für die Berechnung des Windverbandes gilt daher nicht mehr das Superpositionsgesetz. Es werden zwei Belastungszustände untersucht und miteinander verglichen.

1. Vollbelastung der Brücke und Winddruck von 150 kg/m².
2. Vollbelastung der Brücke und ungleiche Erwärmung.

Die Pendelsäulenkraft beträgt bei Vollbelastung für alle vier Pendelsäulen 560 t.

Der Winddruck bei 150 kg/m² $w = 0{,}670$ t/m Brücke.

Das Trägheitsmoment des Windverbandes beträgt $I = 15{,}11$ m⁴.

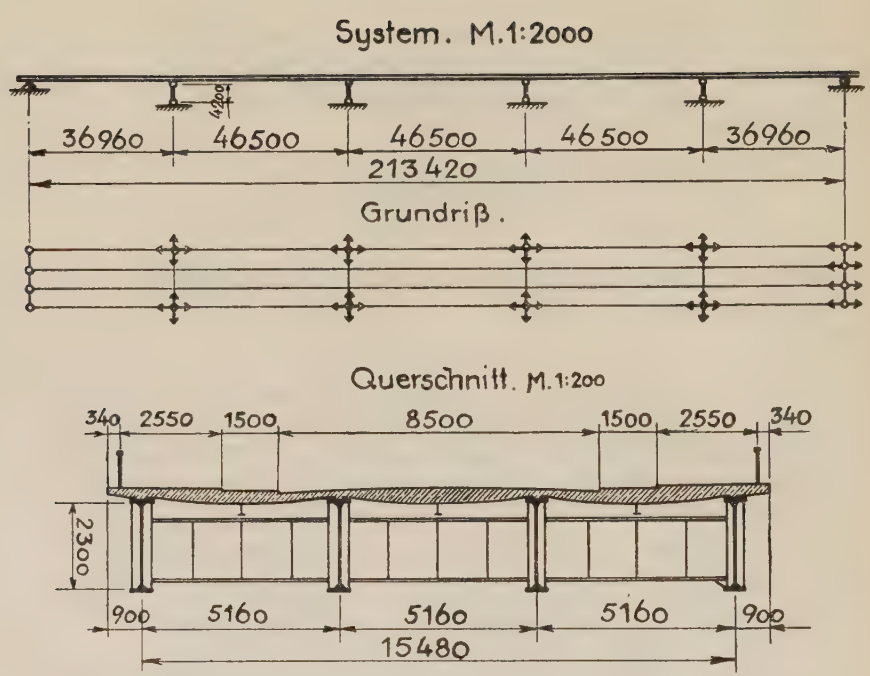


Abb. 27 (Beispiel 3).

Bei Berechnung des Windverbands als Balken auf zwei Stützen und ohne Berücksichtigung der Schrägstellung der Pendelstützen erhält man folgende waagrechte Auflagerkräfte an den äußeren Lagern.

In Längsrichtung:

Bremskraft	$H_b = 10{,}9$ t
Reibungskraft	$H_r = 2{,}8$ t
	$H_l = 13{,}9$ t

In Querrichtung:

Winddruck	$H_q = H_w = 18{,}0$ t

Berücksichtigt man jedoch noch bei diesem System des Balkens auf zwei Stützen die Schrägstellung der Pendelstützen, so wird der waagrechte Auflagerdruck in Querrichtung um 16,0 t größer.

Bei Berücksichtigung der Schrägstellung der Pendelstützen und der Einspannung am festen Lager im

Lastfall 1.

In Längsrichtung:

Bremskraft	$H_b = 10{,}9$ t
Reibungskraft	$H_r = 2{,}8$ t
Winddruck	$H_w = 257{,}9$ t
	$H_{l1} = 271{,}6$ t $= 19{,}8\ H_l$

In Querrichtung:

Winddruck $H_{q1} = H_w = 25{,}3$ t $= 1{,}4\ H_q$

Lastfall 2.

In Längsrichtung:

Bremskraft	$H_b = 10{,}9$ t
Reibungskraft	$H_r = 2{,}8$ t
ungleiche Erwärmung	$H_t = 350{,}6$ t
	$H_{l2} = 364{,}3$ t $= 26{,}5\ H_l$

In Querrichtung:

ungleiche Erwärmung $H_{q2} = H_t = 8{,}4$ t $< H_q$

Es ist also in diesem Falle vollkommen ausgeschlossen, die einseitige Einspannung des Windverbandes zu vernachlässigen.

D. Folgerungen.

1. Allgemeines.

Wie vorstehende Untersuchungen zeigen, können die sich aus ungleicher Erwärmung vollwandiger Hauptträger ergebenden Kräfte nicht ohne weiteres vernachlässigt werden. Die aus ungleicher Erwärmung einzelner Bauteile entstehenden Einflüsse werden vielmehr nach den deutschen Brückenbauvorschriften zu den Hauptkräften gezählt. Und zwar wird der auftretende Wärmeunterschied mit 15^0 angenommen. Über die Größe dieses Wärmeunterschiedes liegen leider nur wenige Versuchsergebnisse vor. Müllenhoff berichtet, daß amerikanische Versuche in den Tropen Wärmeunterschiede zwischen der Lufttemperatur und der Temperatur von Stahlplatten, die der vollen Sonnenstrahlung ausgesetzt waren, bis $22{,}7^0$ bei schwarzem und $13{,}3^0$ bei weißem Anstrich ergeben haben. („Der Eisenbau“ 1921, Seite 43.) Für unsere Breiten werden allerdings Wärmeunterschiede von 15^0 äußerst selten vorkommen. Für die ungleiche Erwärmung der einzelnen Hauptträger erscheint selbst dieser Wert noch zu hoch.

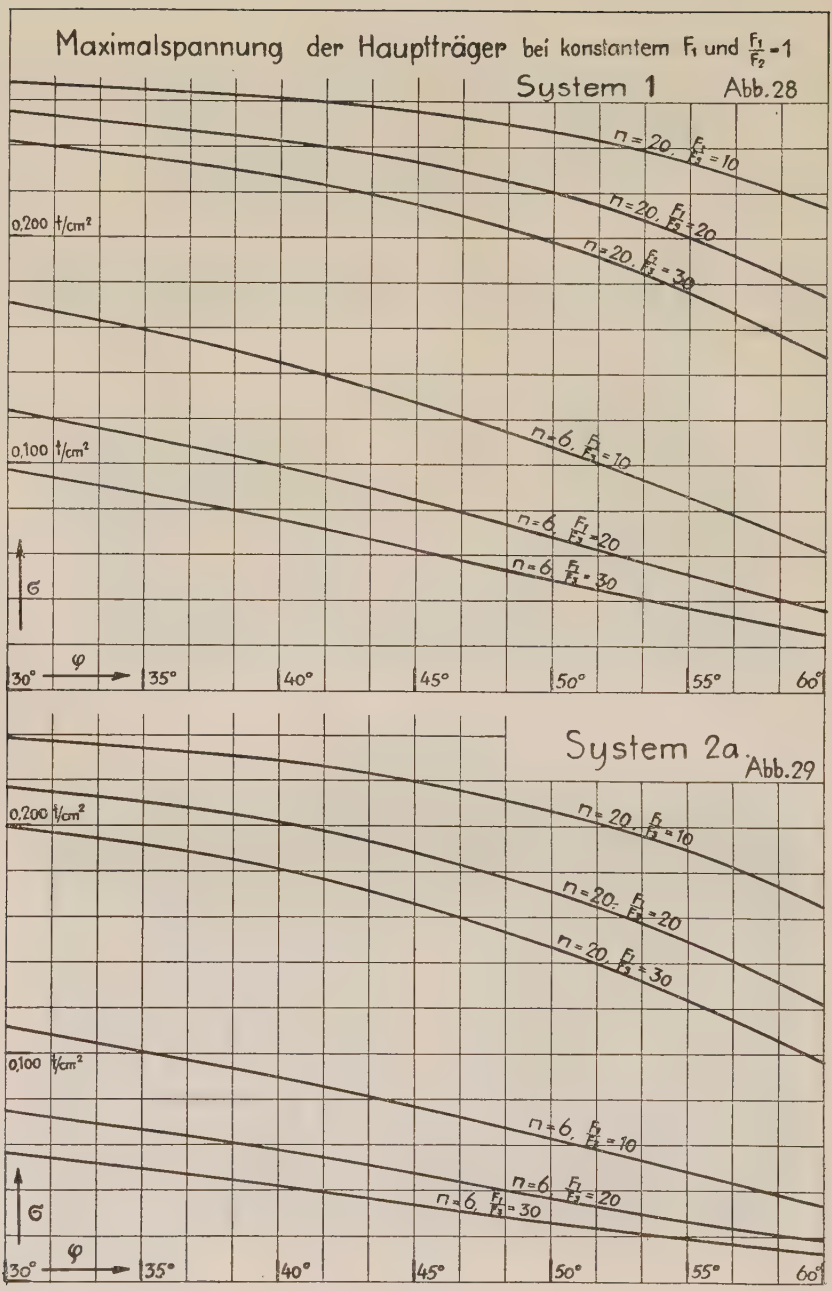

Maximalspannung der Hauptträger bei konstantem F_1 und $\frac{F_1}{F_2}=1$
System 1
Abb. 28
n = 20, $\frac{F_1}{F_2}$ = 10
n = 20, $\frac{F_1}{F_2}$ = 20
n = 20, $\frac{F_1}{F_2}$ = 30
0,200 t/cm²
n = 6, $\frac{F_1}{F_2}$ = 10
n = 6, $\frac{F_1}{F_2}$ = 20
n = 6, $\frac{F_1}{F_2}$ = 30
0,100 t/cm²
σ
30°
φ
35°
40°
45°
50°
55°
60°
System 2a
Abb. 29
n = 20, $\frac{F_1}{F_2}$ = 10
n = 20, $\frac{F_1}{F_2}$ = 20
n = 20, $\frac{F_1}{F_2}$ = 30
0,200 t/cm²
n = 6, $\frac{F_1}{F_2}$ = 10
n = 6, $\frac{F_1}{F_2}$ = 20
n = 6, $\frac{F_1}{F_2}$ = 30
0,100 t/cm²
σ
30°
φ
35°
40°
45°
50°
55°
60°

Abb. 28 und 29.

Die Tatsache, daß derartige Wärmeunterschiede auftreten, ist jedoch nicht zu bestreiten. Es wäre daher zu begrüßen, wenn eingehende Beobachtungen in dieser Richtung von maßgebender Stelle angestellt werden würden.

In den Beispielen 1 und 2 ist gezeigt, daß bei den heutigen Ausführungen von vollwandigen Deckbrücken die Beanspruchungen der mittleren Windverbandsstreben schon bei Wärmeunterschieden von rund 4° über der zulässigen Grenze liegen. Bei Eisenbahnbrücken liegen die Verhältnisse etwas günstiger, da die Einführung des Seitenstoßes zu stärkerer Bemessung auch der mittleren Streben zwingt.

Wie vorstehende Beispiele zeigen, können die aus ungleicher Erwärmung der Hauptträger sich ergebenden Stabkräfte des Windverbandes ein Mehrfaches der Stabkräfte aus Winddruck und Seitenstoß erreichen. Die mittleren Streben, die entsprechend der geringeren Querkraft aus Winddruck und Seitenstoß schwächer bemessen sind, erhalten dabei Beanspruchungen, die die zulässigen Spannungen überschreiten, und sogar in besonders ungünstigen Fällen in die Nähe der Knickgrenze kommen können. Selbst in diesem Fall ist keine Gefahr für die Standsicherheit des Bauwerkes gegeben.

Am gefährdesten sind dabei die Nietanschlüsse der mittleren Streben; denn da die Nietanschlüsse von Windverbänden nur nach der anzuschließenden Kraft bemessen werden, können bei Auftreten von drei- bis viermal so hohen Kräften, wie sie Beispiele 1 und 2 ergeben, hier Schäden auftreten. Allerdings sind gerade die Anschlüsse der mittleren Windverbandsstreben aus konstruktiven Gründen meistens sehr reichlich bemessen.

Für die Gurte (Hauptträger) weist schon Engesser (Zusatzkräfte Seite 50) bei dieser Belastung — bei den ungünstigen Werten $F_2 = F_3 = \infty$ und $n = \infty$ — als größte Zusatzspannung 0,375 t/cm² nach (vgl. Abb. 28 und 29).

Zur Abhilfe bieten sich folgende Möglichkeiten:

2. Statisch bestimmte Lagerung.

Das durchgreifendste Mittel, diese großen Kräfte auszuschalten, bietet sich in der statisch bestimmten Lagerung der Brücke auch für waagerechte Kräfte. Da andere Lageranordnungen als nach Abb. 1 und 2 die waagerechten Verbände der Brücke noch ungünstiger beanspruchen würden (Schaper: Die Grundlagen des Stahlbaues, VI. Aufl., Seite 194), muß die Lagerung für lotrechte Kräfte eindeutig von der Lagerung für waagerechte Kräfte getrennt ausgebildet werden. Das Idealbild der statisch bestimmten Lagerung zeigt die Abb. 30. Die

vier Ecklager A sind allseitig beweglich und dienen nur zur Aufnahme der lotrechten Kräfte. Das Lager B ist als Zapfenlager ausgebildet (Abb. 31). Es übernimmt keine lotrechten Kräfte, dagegen

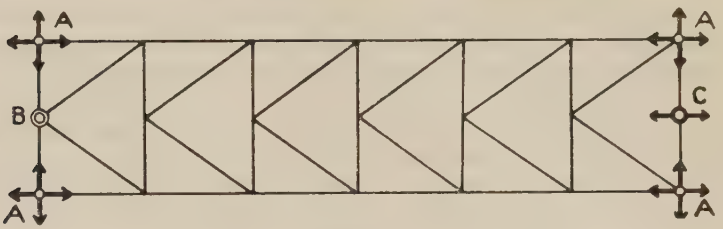


Abb. 30.

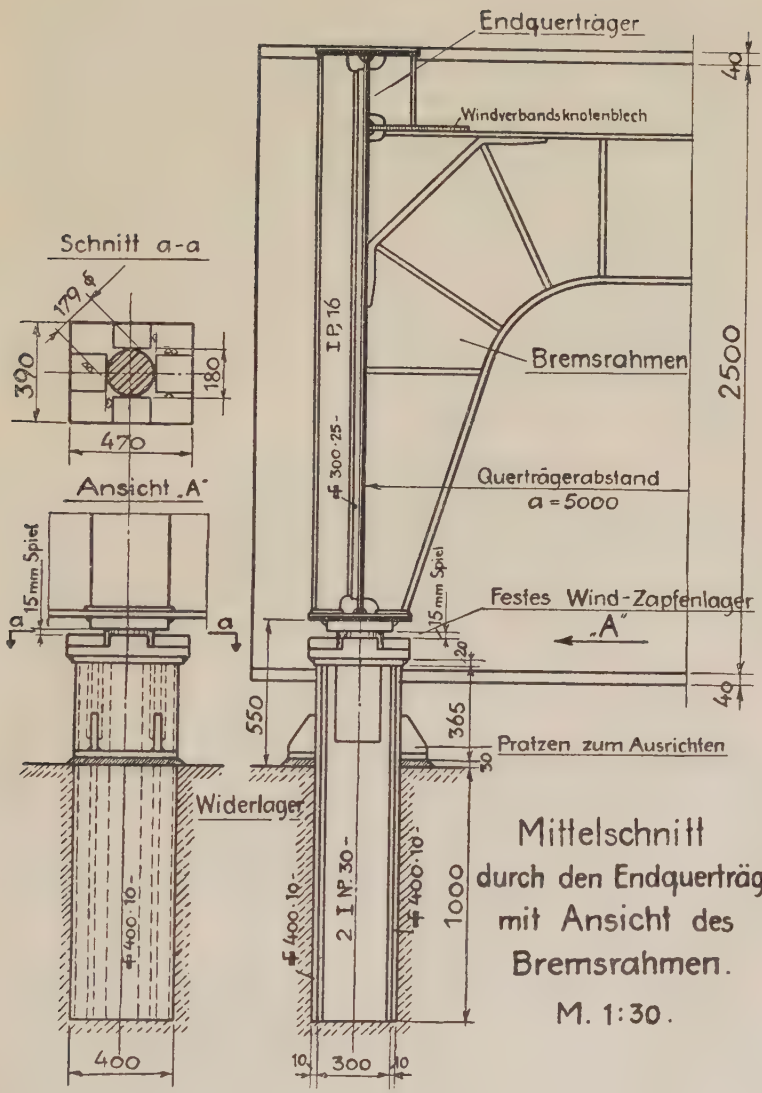
waagerechte in beiden Richtungen. Das Lager C besteht ebenfalls aus einem Zapfenlager, das sich in der Längsrichtung gegen die Seitenflanken verschieben kann. Der Abstand der Oberkante der Knaggen bei den Lagern B und C von der Unterkante der Endquerträger richtet sich nach deren größter Durchbiegung durch lotrechte Kräfte (Abb. 31).

Diese Lagerung hat den Vorteil, daß die Zusatzkräfte aus ungleicher Erwärmung fortfallen, und nur die Auflagerkräfte aus Winddruck und Seitenstoß in Querrichtung und Bremskraft und Reibungskraft in Längsrichtung von den Windlagern aufgenommen werden müssen, so daß damit diese rechnerische Sicherheit für den Windverband und die Auflagerung hergestellt ist.

Welche Größe die horizontalen Kräfte bei Einspannung an einem Ende erreichen können, zeigt Beispiel 3. Bei diesem ausgeführten Bauwerk zeigten sich noch vor Inbetriebnahme Schäden an den Lagern, so daß Windlagerblöcke — ähnlich den Zapfenlagern B und C — nachträglich eingebaut wurden. (Vergleiche auch: Engesser, Zentralblatt der Bauverwaltung 1897, Seite 341 ff.)

Nachteilig sind die vermehrten Aufwendungen gegenüber der üblichen Lagerung. Denn durch die Lagerung müßten:

a) Alle Lager allseitig beweglich angeordnet werden.
b) Stets, auch bei Straßenbrücken, ein besonderer Bremsverband eingezogen werden, der die Bremskräfte in der Mitte des Endquerträgers abgibt.
c) Die Bremskräfte an dem Querträger von Fahrbahnoberkante bis Querträgerunterkante geleitet werden. Zu diesem Zweck muß an den Querträger etwa ein einhüftiger Rahmen (Abb. 31) angegliedert werden, der dieses Versetzungsmoment in ein



Mittelschnitt durch den Endquerträger mit Ansicht des Bremsrahmen.

M. 1:30.

Abb. 31.

durch den End- und zweiten Querträger aufzunehmendes Kräftepaar umsetzt. Als Riegel könnte ein allenfalls vorhandener mittlerer Längsträger herangezogen werden.

d) Die neu hinzutretenden Zapfenlager angeordnet werden.

e) Außerdem werden hierdurch die waagerechten Kräfte an einem Punkt des Widerlagers abgegeben. Dieses ist allerdings nur ein rechnerischer Nachteil. Denn in Wahrheit ist es bei Lagerung nach Abb. 1 oder 2 so, daß die festen Lager bedeutend höhere Kräfte aufzunehmen hatten, als die, für die sie berechnet sind. Daß im allgemeinen sich keine Schäden bemerkbar gemacht haben, liegt daran, daß das errechnete Zusammenwirken aller ungünstigen Belastungen nur äußerst selten vorkommt und selbst dann die Beanspruchungen des Widerlagermaterials gering sind.

Diese Ideallagerung wird sich daher nur in besonders gearteten Ausnahmefällen als notwendig erweisen.

3. Aufnahme der Kräfte.

Der zweite, für den Stahlüberbau konstruktiv einfachere Weg ist, nach Berechnung der wirklich auftretenden Kräfte auf Grund der im Teil B ermittelten Formeln, den Windverband und die Auflagerung für diese Kräfte zu bemessen. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die volle Windbelastung und der volle Wärmeunterschied meterologisch nicht zu gleicher Zeit auftreten können. Denn eine ungleiche Erwärmung setzt starke Sonnenbestrahlung voraus (eine einseitige Abkühlung durch Hagelschauer kann höchstens Wärmeunterschiede von wenigen Grad hervorrufen), bei der ein derartiger Winddruck, wie er der Berechnung zugrunde gelegt wird, nicht im entferntesten auftreten kann. Der Windverband wäre also für 1. Winddruck und Seitenstoß und 2. Wärmeunterschied und Seitenstoß zu untersuchen. Es besteht kein Anlaß, aus diesem Grunde die zulässigen Spannungen zu erhöhen, denn Wärmeunterschiede können täglich mehrere Wochen hindurch auftreten, während ein Winddruck von über 150 kg/m² zu den Katastrophenfällen gehört.

Die Gewichtsvermehrung der Stahlkonstruktionsteile ist gegenüber dem Vorteil der durch diese Maßnahme erhöhten Sicherheit bedeutunglos. Rechnet man rund 5% des gesamten Stahlgewichtes für den Windverband, so wird dieses sich bei ungünstigen Fällen um etwa 40% erhöhen, d. h. für das gesamte Stahlgewicht ist mit einer Erhöhung von höchsens 2% zu rechnen.

Anders dagegen ist es mit der Ausbildung der Widerlager. Hier handelt es sich hauptsächlich um die Verankerung der Lager und

um die Standsicherheit der Widerlagerkörper. Für die Verankerung der Lager können keine Bedenken bestehen bei einer so weit getriebenen Genauigkeit der Berechnung, die Reibung zwischen Lagerunterplatte und Zementfuge zu berücksichtigen. Setzt man die Reibungszahl zwischen Stahl und Beton ohne Haftspannungen mit etwa 0,42 an (Hütte Bd. 1 26. Auflage Seite 301), so kann bei rund zweifacher Sicherheit von den waagerechten Kräften $0{,}2 \cdot A_g$ für die Berechnung der Verankerung (Dollen, Knaggen) abgezogen werden. Die Standsicherheit der Widerlager wird durch diese Einspannungskräfte nicht berührt, solange das Widerlager ein einheitlicher Körper ist, da es sich nur um verdrehende Kräftepaare handelt. Befindet sich im Widerlagerkörper jedoch eine senkrecht durchgehende Bewegungsfuge zwischen den Brückenlagern, so ist die Standsicherheit jedes Teiles für sich zu untersuchen.

4. Sonderfälle.

In Sonderfällen können jedoch noch andere Gesichtspunkte zur Verringerung der errechneten Kräfte führen.

Wenn die Verhältnisse so beschaffen sind, daß von der gleitenden Reibung in der Kippfläche des festen Lagers die Bremskraft und Reibungskraft mit Sicherheit aufgenommen wird, kann auf die unmittelbare Anlage an den seitlichen Berührungsflächen in Richtung der Brückenlängsachse verzichtet werden; d. h. wenn

$$H_B + H_R < \frac{0{,}2\, A_g}{\nu}$$

ist, werden diese Kräfte durch die Reibung aufgenommen. Hierbei ist zur Erhöhung der Sicherheit für die gleitende Reibung nur der Auflagerdruck aus ständiger Last gewählt. Obwohl nämlich das Auftreten von Bremskräften eine Verkehrslast voraussetzt, ist die Größe des dabei auftretenden senkrechten Auflagerdruckes aus Verkehrslast nicht bekannt und jedenfalls keinesfalls gleich max Ap.

Im Beispiel 1 beträgt:

$$A_g = \frac{30{,}0}{2} \cdot 7{,}45 = 112\,\text{t} \qquad Ap = \frac{30{,}0}{2} \cdot \frac{2{,}50}{1{,}33} + \frac{22{,}7}{1{,}33} = 45\,\text{t}$$

$$H_B = \frac{2{,}50 \cdot 30{,}0}{1{,}33} \cdot \frac{1}{20} = 2{,}8\,\text{t}$$

$$H_R = (112 + 45) \cdot 0{,}03 = 4{,}7\,\text{t}$$

$$\nu = \frac{0{,}2 \cdot 112}{2{,}8 + 4{,}7} = 2{,}99$$

Beispiel 2:

$$A_g = \frac{30{,}0}{2} \cdot 1{,}80 = 27 \text{ t}$$

$$H_B = \frac{390}{2 \cdot 7} = 27{,}8 \text{ t}$$

$$H_R = \left(27 + \frac{5560 + (30{,}0 - 27{,}0) \cdot 390}{2 \cdot 30{,}0}\right) \cdot 0{,}03 = 4{,}2 \text{ t}$$

$$H_B + H_R = 27{,}8 + 4{,}2 = 32{,}0 > 27{,}0 = A_g$$

Im Beispiel 2 ist also eine Aufnahme durch Reibung nicht möglich.

Bei Straßenbrücken wird es also im allgemeinen möglich sein, die Bremskraft und Reibungskraft lediglich durch die Lagerreibung aus ständiger Last mit genügender Sicherheit aufzunehmen. Bei Eisenbahnbrücken dürfte dieser Fall nur eintreten, wenn die Bettung durchgeführt wird, und dadurch die ständige Last ausreichend erhöht wird. Eine zweifache Sicherheit dürfte auch für diesen Fall ausreichen, besonders da bei Auftreten von Bremskräften eine gewisse Erhöhung des Auflagerdruckes und damit der zu überwindenden Reibung vorhanden ist.

Die festen Auflager können bei dieser Ausbildung nur waagerechte Kräfte von höchstens $\max H = \mu \cdot \max A$ durch Reibung aufnehmen. Überschreitet die waagerechte Auflagerkraft die Reibungskraft, so tritt eine Verschiebung ein. Die größte Kraft, die auftreten kann, ist also $\max H = \mu \cdot \max A_{g+p}$. Hierbei braucht die Stoßzahl nicht berücksichtigt zu werden, da bei Auftreten von Stößen die Reibungszahl erniedrigt wird. Mit dieser Kraft ist der Windverband und die Auflagerung zu berechnen. Die Stabkräfte in den Windverbandsstreben erhalten dann die Größe

$$D_R = 0{,}2\, A_{(g+p)} \frac{d}{L}$$

Im Beispiel 1 würde man damit erhalten:

$$D_R = 0{,}2\,(112 + 45)\frac{6{,}10}{30{,}0} = 6{,}4 \text{ t} = 0{,}71\, D_t;\ D_t = 9{,}04 \text{ t}$$

Während bei fester Lagerung die Streben D_2 und D_8 hoch überbeansprucht sind, und sogar D_3 bis in die Nähe der Knickgrenze belastet ist, werden die Beanspruchungen durch gleitende Lagerung erheblich herabgesetzt, ohne allerdings unter die zulässige Grenze zu gelangen.

Nachdem die Größen der auftretenden Kräfte erkannt sind, kann man durch geeignete Maßnahmen, ohne grundlegende Änderungen an der Auflagerung vorzunehmen, sich gegen Überbeanspruchungen schützen. Voraussetzung ist, daß

$$H_B + H_R < 0{,}1\, A_g \text{ ist (für } \nu = 2).$$

Dann kann das feste Lager in ein Reibungslager verwandelt werden, indem die Anlageknaggen zwischen Lager-Ober- und Unterteil in Richtung der Längsachse ein Spiel von mindestens

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \varepsilon_t \cdot L = \frac{15}{4} \cdot 0{,}000012\, L = 0{,}000045\, L$$

bezw. $S^{[mm]} = 0{,}045\, L^{[m]}$ erhalten.

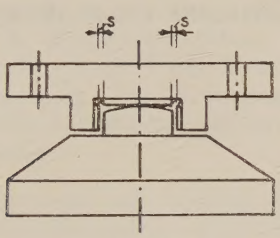


Abb. 32.

Die größte Strebenkraft aus Wärmeunterschied beträgt dann:

$$D_R = 0{,}2\, A_{(g + \varphi p)} \frac{d}{L}$$

Solange kein Wärmeunterschied wirkt, unterscheidet sich die Lagerung in nichts von der üblichen, da sämtliche waagerechten Kräfte in Brückenlängsachse durch die Reibung aufgenommen werden. Bei Auftreten von Wärmeunterschieden können sich die Hauptträger verhältnismäßig spannungsfrei dehnen, so daß, wie oben gezeigt, die Zusatzspannungen in mäßigen Grenzen bleiben.

Das Maß des erforderlichen Spiels s beträgt in vorstehenden Beispielen:

$$\min s_1 = 0{,}045 \cdot 30 = 1{,}4 \text{ mm}$$
$$\min s_3 = 0{,}045 \cdot 213{,}42 = 9{,}6 \text{ mm}$$

während in dem Entwurf DIN E 1039 für Lager sämtlicher Größen nur $s_{DIN} = 1{,}5$ mm vorgesehen ist.

E. Schluß.

Nach den deutschen Brückenbauvorschriften ist für ungleiche Erwärmung einzelner Bauteile ein Wärmeunterschied von 15^0 in Rechnung zu stellen.

Wie vorstehende Seiten zeigen, kann diese ungleiche Erwärmung sehr bedeutende Kräfte im Windverband und in der Auflagerung hervorrufen. Die jeweilige Ermittlung dieser Kräfte würde stets eine verhältnismäßig große Rechenarbeit benötigen.

Die im Teil B ermittelten Formeln gestatten in theoretisch einwandfreier Weise eine schnelle Ermittlung der auftretenden Kräfte.

Die Berücksichtigung dieser Kräfte erlaubt es, einerseits Rückschlüsse auf die Zweckmäßigkeit der verschiedenen Windverbandssysteme zu ziehen, andererseits zwingt sie zu besonderen konstruktiven Maßnahmen.

Lebenslauf.

Ich wurde am 16. Juni 1912 in Königsberg i. Pr. geboren. Nach Besuch des Gymnasiums in Königsberg i. Pr. widmete ich mich dem Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule zu Breslau. Dort bestand ich im Jahre 1932 die Diplomvorprüfung und im Jahre 1935 die Diplomhauptprüfung.

Seit 1935 bin ich bei der Firma Beuchelt und Co., Grünberg (Schlesien), als Statiker tätig. Die Bearbeitung mehrerer Blechträger größerer Stützweite und Gesamtlänge gab mir die Anregung zu vorstehenden Untersuchungen.

Die Arbeit fand jederzeit das Interesse von Herrn Prof. W. Rein sowie auch des Mitberichterstatters Herrn Prof. Fischer. Ihnen sei auch an dieser Stelle herzlichst gedankt.